

MATURA PRÓBNA

ROZSZERZENIE

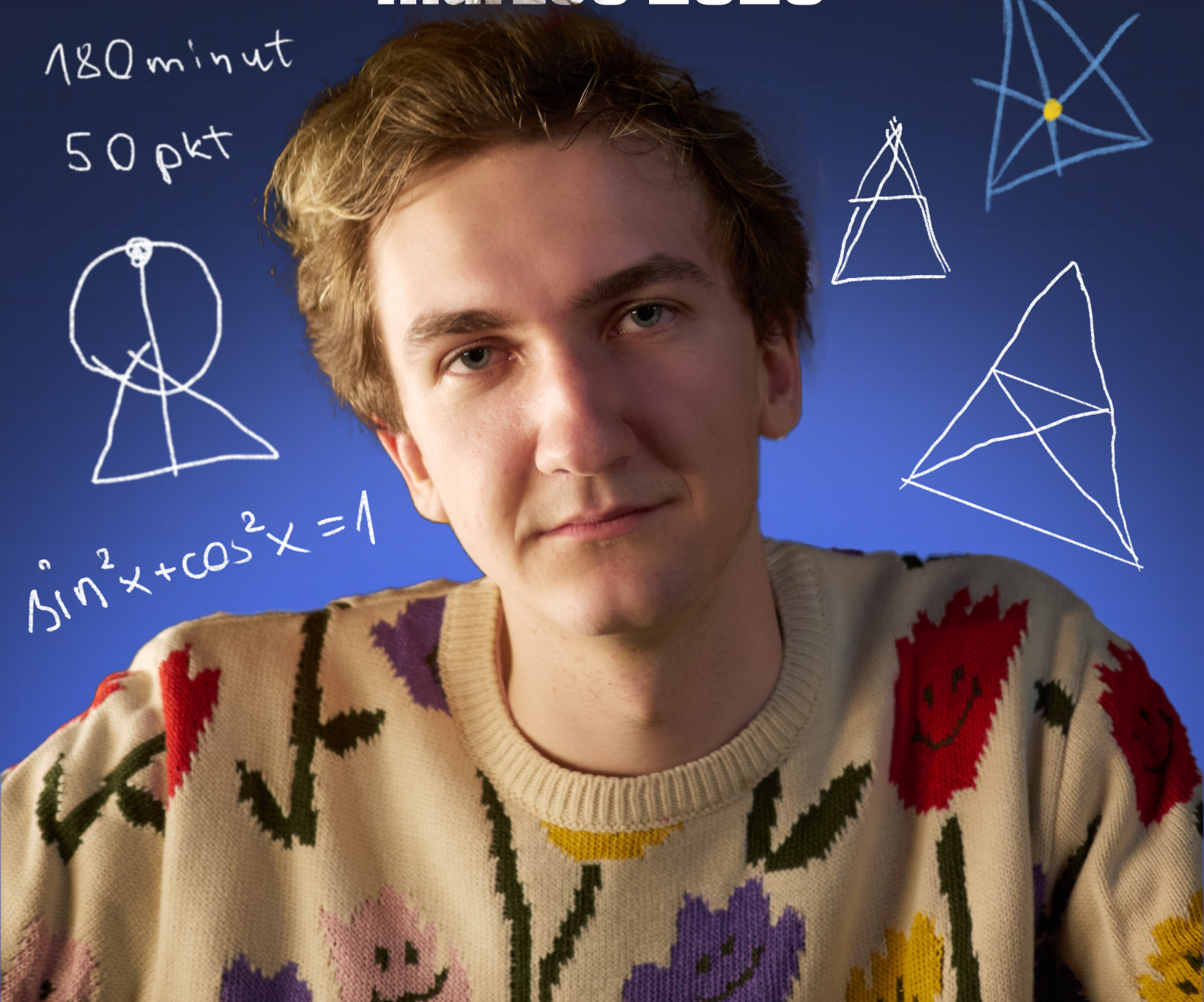
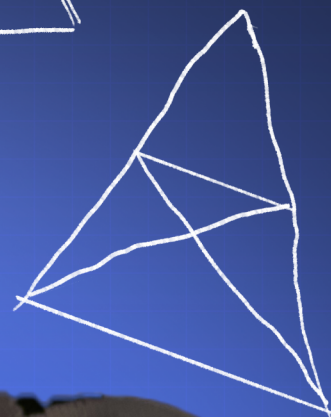
maturazlewusem.pl
marzec 2026

180 minut

50 pkt



$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$



Przeczytaj przed przystąpieniem

1. Przystępujesz do matury próbnej stworzonej przez maturazlewusem.pl
2. Poziom arkusza i zadań jest zbliżony do tego od CKE
3. Zrób arkusz w jednym posiedzeniu z zegarkiem w ręku (timer dostępny na www.maturazlewusem.pl/probna)
4. Swoj wynik możesz sprawdzić wpisując odpowiedzi na www.maturazlewusem.pl/probna
5. Oficjalne rozwiązanie z wytłumaczeniem znajdziesz w niedzielę 8.03.2026r na streamie www.twitch.tv/lewus (tak będzie zapis na YT)

Zadanie 1. (0–2 pkt)

Liczba ludności Nigerii zmienia się w czasie zgodnie z zależnością wykładniczą

$$P(t) = P_0 \cdot k^t \quad \text{dla } t \geq 0$$

gdzie

- P_0 to populacja w roku 2020,
- t to liczba lat, które upłynęły od tego roku.

W roku 2020 ($t = 0$) populacja Nigerii wynosiła 200 mln osób, a w roku 2022 ($t = 2$) wzrosła do 216,32 mln osób. **Oblicz, o ile procent średnio wzrastała liczba ludności Nigerii w ciągu każdego roku oraz wyznacz populację w 2026 roku. Wynik zaokrąglij do dziesiątek tysięcy.**

Zadanie 2. (0–4 pkt)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunki $(3x + y) > 0$ oraz $x \neq y$, prawdziwa jest nierówność:

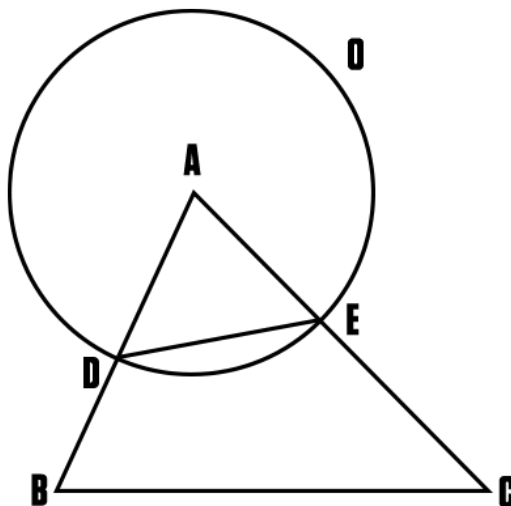
$$3x^3 - 5x^2y + xy^2 + y^3 > 0$$

Zadanie 3. (0–3 pkt)

W pewnym mieście 30% mieszkańców ma powyżej 65 lat. Wśród osób w tym wieku 60% dobrze zna język francuski. Ponadto 50% mieszkańców jest w wieku 25–65 lat i w tej grupie 35% osób dobrze mówi po francusku. Wśród młodzieży (poniżej 25 lat) tylko 8% zna język francuski. Spośród mieszkańców wybieramy losowo jedną osobę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrana osoba ma poniżej 25 lat, jeżeli wiadomo, że dobrze włada językiem francuskim. Wynik podaj w postaci ułamka dziesiętnego, w zaokrągleniu do części setnych.

Zadanie 4. (0–5 pkt)

W trójkącie ABC punkt D leży na boku AB tak, że $|AD| : |DB| = 3 : 2$. Okrąg o ma środek w punkcie A i przechodzi przez punkt D , przecinając bok AC w punkcie E . Dane są zależności $\sin A : \sin C = 8 : 5$ oraz stosunek pól $P_{\triangle ADE} : P_{\triangle ABC} = 9 : 35$. Jeżeli promień okręgu opisanego na trójkącie ABC wynosi 7, wyznacz maksymalne pole trójkąta PBC dla punktu P leżącego na okręgu o . Przyjmij, że $|AB| < |AC|$.



Zadanie 5. (0–4 pkt)

Rozwiąż równanie w przedziale $[0, 2\pi)$:

$$2 \sin^2 x - 1 + 2 \cos^2 x \sin x + 2 \cos^3 x = 1$$

Zadanie 6. (0–4 pkt)

Dany jest nieskończony ciąg $(a, b, c, \dots)$. Trzy pierwsze wyrazy (a, b, c) tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli od pierwszego wyrazu odejmiemy 2, a od drugiego 3, to otrzymany ciąg jest geometryczny i zbieżny. Suma tego ciągu geometrycznego jest $\frac{27}{26}$ razy większa od sumy jego trzech pierwszych wyrazów. Oblicz wartości a, b oraz c .

Zadanie 7. (0–2 pkt)

Wykaż, że funkcja $f(x) = \cos x - 3 + 5x^2$ ma co najmniej jedno dodatnie miejsce zerowe.

Zadanie 8. (0–4 pkt)

Rozwiąż nierówność:

$$\frac{x+1}{x^2-9} - \frac{1}{3-x} \geq \frac{3}{3+x} + 1$$

Zadanie 9. (0–3 pkt)

Na bokach AC i BC trójkąta ABC zaznaczono odpowiednio punkty D i E tak, że $|AD| = 4|DC|$ oraz $|CE| : |EB| = 1 : 4$. Wiadomo, że $|AE| = 48$, $|BD| = 36$ i $|DE| = 10$. Wykaż, że odcinki AE i BD są prostopadłe.

Zadanie 10. (0–4 pkt)

Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 2(m + 3)x + m + 3$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek:

$$x_1^3 + x_2^3 < 850$$

Zadanie 11. (0–4 pkt)

W ostrosłupie $SABCD$ podstawa $ABCD$ jest trapezem ($AB \parallel CD$). Dane są: ramię $AD = 8$, podstawa $AB = 17$ oraz przekątna $BD = 15$. Wszystkie krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 12. (0–5 pkt)

Dana jest parabola $f(x) = x^2 - 12x + 27$ oraz okrąg o środku $S(6, 4)$ i promieniu $r = 5$. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są: punkty przecięcia paraboli i okręgu, których suma współrzędnych wynosi 9, oraz punkt P , będący punktem przecięcia osi OY ze styczną do paraboli w punkcie, w którym funkcja $g(x) = f(x + 1)$ przyjmuje wartość najmniejszą.

Zadanie 13. (0–6 pkt)

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe czworokątne o polu powierzchni całkowitej równym 96.

- a) Wykaż, że objętość V takiego graniastosłupa w zależności od krawędzi podstawy a wyraża się wzorem $V(a) = 24a - \frac{1}{2}a^3$ dla $a \in (0, 4\sqrt{3})$.
- b) Wyznacz długość krawędzi podstawy a tego z rozważanych graniastosłupów, którego objętość jest największa. Oblicz tę objętość.