

MATURA PRÓBNA² ROZSZERZENIE

maturazlewusem.pl
maj 2026

180 minut

50 pkt



$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{4^n + 5 \cdot 7^n + 6^n}$$



$$\log_{48} 120$$

Zadanie 1. (0–2 pkt)

Ilość punktów doświadczenia potrzebnych do wbicia x poziomu z poziomu $x - 1$ opisuje zależność

$$30 \cdot a^x$$

Wiadomo, że aby wbić z 9 poziomu na 10 poziom, potrzeba 30690 punktów doświadczenia. Oblicz, ile punktów potrzeba, aby wbić z poziomu 19 na poziom 20.

Zadanie 2. (0–3 pkt)

Lech Poznań i Legia Warszawa postanowili rozegrać między sobą pięć meczów. Prawdopodobieństwo wygrania pojedynczego meczu przez Legię Warszawa jest równe $\frac{1}{8}$. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania przez Legię Warszawa co najmniej czterech z pięciu meczów. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 3. (0–4 pkt)

Rozwiąż nierówność:

$$\sqrt{x^2 + 12x + 36} + |x + 6| > 3\sqrt{x^2 - 10x + 25} + 3x + 5$$

Zadanie 4. (0–2 pkt)

Oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + 5 \cdot 7^n + 6^n}$$

Zadanie 5. (0–2 pkt)

Udowodnij, że jeżeli $a = \log_3 4$ i $b = \log_3 10$, to:

$$\log_{48} 120 = \frac{a + b + 1}{2a + 1}$$

Zadanie 6. (0–4 pkt)

Rozwiąż równanie:

$$\frac{\sqrt{3} \sin x + 3 \cos x}{3 \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x} = -1$$

Zadanie 7. (0–3 pkt)

W czworokącie wklęsłym połączono środki sąsiednich boków, tworząc nowy czworokąt. Następnie w otrzymanym czworokącie ponownie połączono środki sąsiednich boków, tworząc najmniejszy czworokąt. Udowodnij, że suma długości przekątnych najmniejszego czworokąta jest równa połowie obwodu pierwszego czworokąta powstałego przez połączenie środków boków.

Zadanie 8. (0–5 pkt)

Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli do drugiej liczby dodamy 8, to ciąg ten zmieni się w arytmetyczny. Jeżeli zaś do ostatniej liczby nowego ciągu arytmetycznego dodamy 64, to tak otrzymany ciąg będzie znów geometryczny. Znajdź te liczby. Uwzględnij wszystkie możliwości.

Zadanie 9. (0–5 pkt)

Oblicz, dla jakich wartości parametru k odległość pomiędzy różnymi rozwiązaniami równania

$$2x^2 - (x - 1)k - (x + 1) = 0$$

jest mniejsza od ich iloczynu.

Zadanie 10. (0–5 pkt)

W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym $ABCDEFGHJKLM$ płaszczyzna ABQ przechodzi przez krawędź AB i przez środek Q krawędzi DJ . Stosunek pola przekroju graniastosłupa płaszczyzną ABQ do pola jego podstawy jest równy $\frac{13}{12}$. Oblicz objętość graniastosłupa $ABCDEFGHJKLM$, jeżeli jego krawędź boczna ma długość 10.

Zadanie 11. (0–5 pkt)

Na hiperboli $xy = 8$ obrano punkty $A = (2, 4)$ i $B = (1, 8)$. Wyznacz taki punkt C o obu współrzędnych ujemnych, należący do tej hiperboli, aby pole trójkąta ABC było możliwie najmniejsze.

Zadanie 12. (0–4 pkt)

W trapezie prostokątnym $ABCD$, w którym ramię AD jest prostopadłe do podstaw AB i CD , da się wpisać okrąg. Odległości środka tego okręgu od końców dłuższego ramienia BC wynoszą 1 i 4. Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 13. (0–6 pkt)

Dana jest kula o promieniu 1. Rozpatrujemy wszystkie stożki zawierające środek kuli i wpisane w tę kulę, to znaczy takie, w których wierzchołek leży na powierzchni kuli oraz okrąg będący krawędzią podstawy stożka leży na powierzchni kuli. Oblicz promień podstawy tego stożka, który ma największą objętość. Oblicz objętość tego stożka.