

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom rozszerzony
<i>Formy arkusza:</i>	EMAP-R0-100, EMAP-R0-200, EMAP-R0-300, EMAP-R0-400, EMAP-R0-600, EMAP-R0-700, EMAP-R0-K00, EMAP-R0-Q00, EMAU-R0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	11 czerwca 2024 r.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024 ¹	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.R2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 2.R1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

¹ Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 1 sierpnia 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. poz. 1698).

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 7.R4) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 11.R3) korzysta z geometrycznej interpretacji pochodnej.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

ZADANIE OTWARTE (KODOWANE)

Zadanie 5. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.R1) oblicza granice ciągów [...].

Zasady oceniania

2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

4	3	3
---	---	---

ZADANIA OTWARTE (NIEKODOWANE)

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 6. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.R2) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{1}{15}$.

2 pkt – zapisanie liczby elementów zbioru $A \cap B$ i wyznaczenie/zapisanie liczby elementów zbioru B : $|A \cap B| = 8$ i $|B| = \binom{10}{3}$
ALBO

- wyznaczenie/zapisanie prawdopodobieństwa zdarzeń $A \cap B$ oraz B :

$$P(A \cap B) = \frac{8}{2^{10}} \text{ oraz } P(B) = \frac{\binom{10}{3}}{2^{10}}.$$

1 pkt – zapisanie liczby elementów zbioru $A \cap B$: 8

ALBO

- wyznaczenie/zapisanie liczby elementów zbioru B , np. $\binom{10}{3}$,

ALBO

- wyznaczenie/zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia B , np. $P(B) = \frac{\binom{10}{3}}{2^{10}}$,

ALBO

- wyznaczenie/zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia $A \cap B$, np. $P(A \cap B) = \frac{8}{2^{10}}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

A – zdarzenie polegające na wyrzuceniu trzech orłów z rzędu w dziesięciu rzutach monetą,

B – zdarzenie polegające na wyrzuceniu trzech orłów w dziesięciu rzutach monetą,

Ω – zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych.

Wynikiem każdego rzutu jest orzeł (o) lub reszka (r). Wynikiem doświadczenia losowego jest dziesięciowyrazowy ciąg o wyrazach ze zbioru $\{o, r\}$. Zatem liczba elementów zbioru Ω jest równa $2^{10} = 1024$.

Obliczamy liczbę elementów zbioru B : $|B| = \binom{10}{3} = 120$.

Zdarzenie $A \cap B$ polega na wyrzuceniu w dziesięciu rzutach dokładnie trzech orłów i to trzech orłów z rzędu. Obliczamy liczbę elementów zbioru $A \cap B$: $|A \cap B| = 8$.

Obliczamy prawdopodobieństwo $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{\frac{8}{1024}}{\frac{120}{1024}} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

Uwagi:

1. Zdający może rozwiązać zadanie poprzez obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń B oraz $A \cap B$.

2. Zdający może obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia B , korzystając ze schematu Bernoullego. Sukcesem w pojedynczej próbie jest wyrzucenie orła. Prawdopodobieństwo p sukcesu jest równe $p = \frac{1}{2}$. Przy liczbie prób $n = 10$ oraz liczbie sukcesów $k = 3$ otrzymujemy

$$P(B) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^7 = \frac{120}{2^{10}}$$

Zadanie 7. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 3.R7) rozwiązuje proste nierówności wymierne [...].

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wykorzystanie założenia i przekształcenie nierówności $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ do postaci $4a^2 - 4a + 1 \geq 0$, $4b^2 - 4b + 1 \geq 0$ albo $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$
ALBO

– zapisanie nierówności między odpowiednimi średnimi liczb $\frac{1}{2a+b}$ oraz $\frac{1}{a+2b}$ (lub między odpowiednimi średnimi liczb $2a+b$ oraz $a+2b$) i przekształcenie tej nierówności do postaci, z której można bezpośrednio wnioskować o prawdziwości tezy, np. $\frac{3}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}$.

1 pkt – zapisanie nierówności w postaci równoważnej jako nierówności wymiernej

$$\frac{P(a,b)}{Q(a,b)} \geq 0, \text{ np. } \frac{3(a+2b)+3(2a+b)-4(a+2b)(2a+b)}{3(2a+b)(a+2b)} \geq 0$$

ALBO

– zapisanie nierówności w postaci równoważnej jako nierówności wielomianowej, np. $3(1+b) + 3(a+1) \geq 4(a+1)(1+b)$,
ALBO

– zapisanie nierówności między średnią harmoniczną a arytmetyczną liczb $\frac{1}{2a+b}$ oraz $\frac{1}{a+2b}$ (lub między odpowiednimi średnimi liczb $2a+b$ oraz $a+2b$), np.

$$\frac{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}, \quad \frac{2a+b+a+2b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}},$$

ALBO

– wykorzystanie założenia i zapisanie nierówności w postaci równoważnej jako nierówności wymiernej z jedną niewiadomą, np. $\frac{1}{2a+(1-a)} + \frac{1}{a+2(1-a)} \geq \frac{4}{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Ponieważ $a > 0$ i $b > 0$, więc $(2a+b)(a+2b) > 0$.

Przekształcamy równoważnie nierówność $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ i otrzymujemy:

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$$

$$\frac{3(a+2b)}{3(2a+b)(a+2b)} + \frac{3(2a+b)}{3(a+2b)(2a+b)} - \frac{4(a+2b)(2a+b)}{3(a+2b)(2a+b)} \geq 0$$

$$\frac{3a+6b+6a+3b-8a^2-20ab-8b^2}{3(2a+b)(a+2b)} \geq 0$$

$$\frac{9a+9b-8a^2-20ab-8b^2}{3(2a+b)(a+2b)} \geq 0$$

$$9a+9b-8a^2-20ab-8b^2 \geq 0$$

Korzystamy z założenia i otrzymujemy dalej

$$9a+9(1-a)-8a^2-20a(1-a)-8(1-a)^2 \geq 0$$

$$4a^2-4a+1 \geq 0$$

$$(2a-1)^2 \geq 0$$

Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc nierówność $(2a-1)^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a . To oznacza, że nierówność

$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a i dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej b takich, że $a+b=1$.

Sposób II

Korzystamy z założenia $a+b=1$ i nierówność $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ zapisujemy w postaci

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{4}{3}$$

Mnożymy obie strony tej nierówności przez liczbę dodatnią $3(a+1)(1+b)$ i ponownie korzystamy z założenia, otrzymując kolejno:

$$3(1+b) + 3(a+1) \geq 4(a+1)(1+b)$$

$$2 - (a+b) \geq 4ab$$

$$1 \geq 4ab$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

Ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc nierówność $(a-b)^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby

rzeczywistej b . To oznacza, że nierówność $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a i dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej b takich, że $a+b=1$.

Sposób III

Korzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną a harmoniczną dla liczb dodatnich

$\frac{1}{2a+b}$ oraz $\frac{1}{a+2b}$ i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}{2} &\geq \frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{2a+b}} + \frac{1}{\frac{1}{a+2b}}} \\ \frac{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}{2} &\geq \frac{2}{2a+b+a+2b} \\ \frac{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}{2} &\geq \frac{2}{3(a+b)} \\ \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} &\geq \frac{4}{3(a+b)}\end{aligned}$$

Po skorzystaniu z założenia $a+b=1$ otrzymujemy tezę.

Sposób IV

Korzystamy z założenia $a+b=1$ i nierówność $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ zapisujemy w postaci

$$\frac{1}{2a+1-a} + \frac{1}{a+2(1-a)} \geq \frac{4}{3}$$

Mnożymy obie strony tej nierówności przez liczbę dodatnią $3(a+1)(2-a)$ i otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+1} + \frac{1}{2-a} &\geq \frac{4}{3} \\ 3(2-a) + 3(a+1) &\geq 4(a+1)(2-a) \\ 6-3a+3a+3 &\geq -4a^2+4a+8 \\ 4a^2-4a+1 &\geq 0 \\ (2a-1)^2 &\geq 0\end{aligned}$$

Ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc nierówność $(2a-1)^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a , więc w szczególności dla każdego $a \in (0,1)$. To oznacza, że nierówność $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a i dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej b takich, że $a+b=1$.

Zadanie 8. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.R1) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wyznaczenie pola trapezu w zależności od długości jego podstaw: $P = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$.

1 pkt – zastosowanie twierdzenia Pitagorasa i zapisanie równania z a , b oraz h , z którego można wyznaczyć długość wysokości trapezu w zależności od długości jego

podstaw, np. $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

ALBO

– wyznaczenie długości promienia okręgu w zależności od długości podstaw trapezu,

np. $r = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}}$,

ALBO

– zapisanie, że pole czworokąta wpisanego w okrąg i opisanego na okręgu jest równe pierwiastkowi z iloczynu długości boków tego czworokąta,

ALBO

– zapisanie, że wysokość trapezu równoramiennego jest średnią geometryczną długości podstaw trapezu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

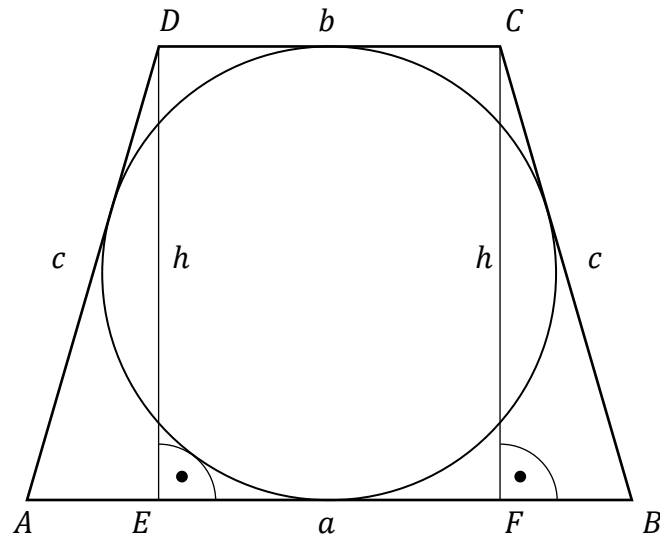
W przypadku, gdy zdający zapisze nierówność $\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > ab$ w postaci równoważnej

$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ i stwierdzi, że jej prawdziwość wynika z nierówności między średnią

arytmetyczną i geometryczną różnych liczb dodatnich a i b , to rozumowanie uznajemy za pełne.

Przykładowe pełne rozwiązaniaSposób I

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trapez jest równoramienny, więc $|AE| = |BF| = \frac{a-b}{2}$. Ponieważ trapez jest opisany na okręgu, więc $a + b = c + c$, czyli $c = \frac{a+b}{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCF otrzymujemy

$$|BF|^2 + |FC|^2 = |CB|^2$$

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 = c^2$$

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad / \cdot 4$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 4h^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$h = \sqrt{ab}$$

Pole P trapezu jest równe $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$.

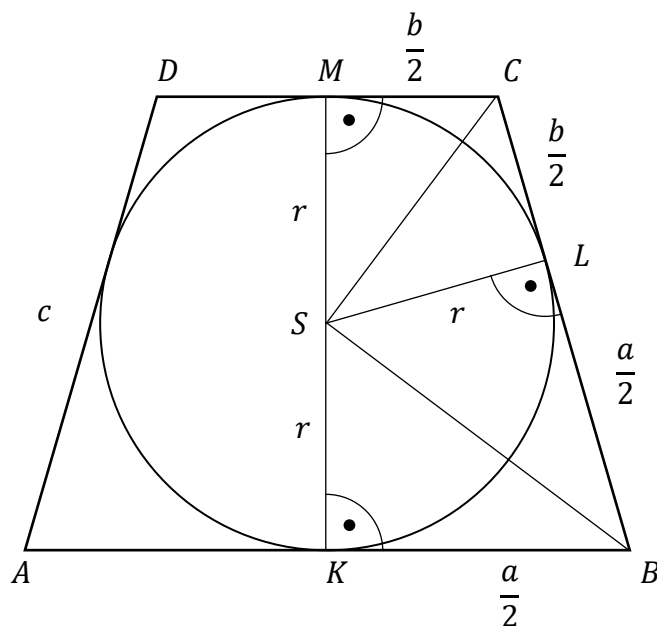
Ponieważ $a > b$, więc z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną liczb dodatnich a oraz b otrzymujemy $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. Stąd

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}$$

czyli $P > ab$, co należało wykazać.

Sposób II

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku (K, L, M są punktami styczności okręgu z trapezem).



Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że $|BL| = \frac{a}{2}$ oraz $|CL| = \frac{b}{2}$.

Ponieważ środek okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych tego trapezu, więc

$$|\angle KBS| = |\angle CBS| \quad \text{oraz} \quad |\angle MCS| = |\angle BCS|$$

Suma miar kątów wewnętrznych trapezu przy ramieniu BC jest równa 180° , więc

$$|\angle KBS| + |\angle CBS| + |\angle MCS| + |\angle BCS| = 180^\circ$$

Zatem

$$|\angle CBS| + |\angle BCS| = 90^\circ$$

To oznacza, że trójkąt BCS jest prostokątny.

Wysokość tego trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną jest promieniem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$, więc z twierdzenia o wysokości trójkąta prostokątnego wynika,

$$\text{że } r = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{ab}.$$

$$\text{Pole } P \text{ trapezu jest równe } P = \frac{a+b}{2} \cdot 2r = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}.$$

Pozostaje wykazać, że prawdziwa jest nierówność $\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > ab$.

Dzieląc obie strony tej nierówności przez $\sqrt{ab}$, otrzymujemy

$$\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > ab \quad /: \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b > 0$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$$

Z założenia $a > b > 0$, więc $\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$. Zatem $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$ jako kwadrat liczby dodatniej $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. To oznacza, że $P > ab$.

Sposób III

Z własności czworokąta opisanego na okręgu i w który można także wpisać okrąg wynika, że pole takiego czworokąta jest równe $\sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$, gdzie a, b, c, d są długościami boków czworokąta.

Trapez $ABCD$ jest opisany na okręgu, ale jest on równoramienny, więc można na nim także opisać okrąg. Zatem pole P tego trapezu jest równe $P = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot c} = \sqrt{ab} \cdot c$, gdzie c jest długością ramienia trapezu.

Ponieważ trapez jest opisany na okręgu, więc $a + b = c + c$, czyli $c = \frac{a+b}{2}$.

$$\text{Stąd } P = \sqrt{ab} \cdot \frac{a+b}{2}.$$

Ponieważ $a > b$, więc z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną liczb dodatnich a oraz b otrzymujemy $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. Stąd

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}$$

czyli $P > ab$, co należało wykazać.

Zadanie 9. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.R2) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

$$a_n = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3 pkt – odrzucenie wartości $q = 2$ **oraz** poprawne zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego i zapisanie równania z jedną niewiadomą $a_1 : \frac{a_1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 16$ (dla

sposobu I)

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą q oraz obliczenie pierwiastków tego równania, np.

$$16(1 - q^2) + 16(1 - q^2) \cdot q^2 = \frac{5}{2} \cdot 16(1 - q^2) \cdot q$$

i $q = 1$ oraz $q = -1$, oraz $q = \frac{1}{2}$, oraz $q = 2$,

oraz odrzucenie tych wartości q , dla których nie jest spełniony warunek zbieżności $|q^2| < 1$ (dla sposobu II).

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą q **oraz** obliczenie pierwiastków tego równania, np. $2q^2 - 5q + 2 = 0$ i $q = \frac{1}{2}$ oraz $q = 2$ (dla sposobu I)

ALBO

– zapisanie równań $a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2} a_1 \cdot q$ oraz $\frac{a_1}{1 - q^2} = 16$ (dla sposobu II).

1 pkt – zapisanie równania $a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2} a_1 \cdot q$ (dla sposobu I)

ALBO

– poprawne zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego i zapisanie równania $\frac{a_1}{1 - q^2} = 16$ (dla sposobu II).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze sumę wszystkich wyrazów ciągu o wyrazach nieparzystych jako $\frac{a_1}{1 - q}$ i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to otrzymuje **3 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający myli ciąg geometryczny z arytmetycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego (a_n) . Z warunku $a_1 + a_3 = \frac{5}{2}a_2$ oraz z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2} \cdot a_1 \cdot q$$

$$a_1 \cdot \left(1 + q^2 - \frac{5}{2}q\right) = 0$$

$$a_1 = 0 \quad \vee \quad q^2 - \frac{5}{2}q + 1 = 0$$

$$a_1 = 0 \quad \vee \quad q = 2 \quad \vee \quad q = \frac{1}{2}$$

Rozważmy nieskończony ciąg wyrazów o numerach nieparzystych, tj. $a_1, a_3, a_5, \dots$. Jest to ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym a_1 oraz ilorazie q^2 . Ponieważ suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych istnieje i jest równa 16, więc $a_1 \neq 0$ oraz $|q^2| < 1$ i $\frac{a_1}{1-q^2} = 16$. Pozostaje zatem rozpatrzyć przypadki $q = 2$ oraz $q = \frac{1}{2}$.

Gdy $q = 2$, to warunek $|q^2| < 1$ nie jest spełniony.

Gdy $q = \frac{1}{2}$, to warunek $|q^2| < 1$ jest spełniony. Wtedy $\frac{a_1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 16$ i stąd $a_1 = 12$.

Nieskończony ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 12 i ilorazie $\frac{1}{2}$ spełnia warunki zadania. Wzór ogólny na n -ty wyraz ciągu (a_n) ma postać $a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Sposób II

Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego (a_n) .

Rozważmy nieskończony ciąg wyrazów o numerach nieparzystych, tj. $a_1, a_3, a_5, \dots$. Jest to ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym a_1 oraz ilorazie q^2 . Ponieważ suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych istnieje i jest równa 16, więc $a_1 \neq 0$ oraz $|q^2| < 1$ i $\frac{a_1}{1-q^2} = 16$. Zatem $a_1 = 16(1 - q^2)$.

Z warunku $a_1 + a_3 = \frac{5}{2}a_2$ oraz z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2} \cdot a_1 \cdot q$$

Stąd oraz z równości $a_1 = 16(1 - q^2)$ otrzymujemy kolejno:

$$16(1 - q^2) + 16(1 - q^2) \cdot q^2 = \frac{5}{2} \cdot 16(1 - q^2) \cdot q$$

$$16 - 16q^2 + 16q^2 - 16q^4 = 40q - 40q^3$$

$$\begin{aligned}
& -16q^4 + 40q^3 - 40q + 16 = 0 \\
& -16(q^4 - 1) + 40q(q^2 - 1) = 0 \\
& -16(q^2 - 1)(q^2 + 1) + 40q(q^2 - 1) = 0 \\
& (q^2 - 1)[-16(q^2 + 1) + 40q] = 0 \\
& (q^2 - 1)(-16q^2 + 40q - 16) = 0 \\
& q^2 - 1 = 0 \quad \vee \quad -16q^2 + 40q - 16 = 0 \\
& q = 1 \quad \vee \quad q = -1 \quad \vee \quad q = 2 \quad \vee \quad q = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Uwzględniając warunek $|q^2| < 1$, otrzymujemy $q = \frac{1}{2}$. Zatem $a_1 = 12$. Nieskończony ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 12 i ilorazie $\frac{1}{2}$ spełnia warunki zadania. Wzór ogólny na n -ty wyraz ciągu (a_n) ma postać $a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Zadanie 10. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.R4) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\sqrt{21} - 3$ (lub $\sqrt{30 - 6\sqrt{21}}$).

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością boku AC), np.

$$(4\sqrt{3})^2 = |AC|^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot |AC| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$|AC|^2 = (4\sqrt{3})^2 + 6^2 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{8},$$

$$6^2 = |AC|^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot |AC| \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}$$

ALBO

- zapisanie długości boków trójkąta ACE za pomocą jednej niewiadomej i zapisanie równania z tą jedną niewiadomą, które prowadzi do jej obliczenia, np. $|AE| = 3x$ oraz $|AC| = 4x$, oraz $|EC| = \sqrt{7}x$, oraz $(4\sqrt{3} - \sqrt{7}x)^2 + (3x)^2 = 6^2$ (dla sposobu II),

ALBO

- obliczenie sinusa kąta ABC : $\frac{-3 + \sqrt{21}}{8}$ (dla sposobu III).

2 pkt – obliczenie miary kąta BAC : 120°

ALBO

- zapisanie długości boków trójkąta ACE za pomocą jednej niewiadomej, np.

$$|AE| = 3x \text{ oraz } |AC| = 4x, \text{ oraz } |EC| = \sqrt{7}x,$$

ALBO

- obliczenie cosinusa kąta ACB : $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

1 pkt – zapisanie równania, w którym jedyną niewiadomą jest miara kąta BAC (lub miara

$$\text{kąta } ACB), \text{ np. } \frac{4\sqrt{3}}{\sin|\angle BAC|} = 8, \frac{6}{\sin|\angle ACB|} = 8, \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sin|\angle BAC| = \frac{6 \cdot 4\sqrt{3}}{4 \cdot 4}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający uzyska $|\angle BAC| = 60^\circ$ oraz $|\angle BAC| = 120^\circ$ i konsekwentnie obliczy długość boku AC dla obu tych wartości kątów, ale w rozwiązaniu nie odrzuci wartości $|AC| = 3 + \sqrt{21}$, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązaniaSposób I

Oznaczmy przez R promień okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{|BC|}{\sin|\angle BAC|} = 2R$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin|\angle BAC|} = 8$$

Stąd $|\angle BAC| = 60^\circ$ lub $|\angle BAC| = 120^\circ$.

Długość boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o promieniu R jest równa

$R\sqrt{3} = 4\sqrt{3} = |BC|$. Niech D będzie wierzchołkiem trójkąta równobocznego BCD wpisanego w dany okrąg. Ponieważ $|AB| = 6$, więc $A \neq D$. Gdyby wierzchołek A leżał na krótszym z łuków BD , to wówczas AC byłby najdłuższym bokiem trójkąta ABC . Gdyby wierzchołek A leżał na krótszym z łuków CD , to wówczas AB byłby najdłuższym bokiem trójkąta ABC . Zatem A leży na krótszym z łuków BC okręgu i $|\angle BAC| = 120^\circ$.

Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie cosinusów i obliczamy długość boku AC :

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos|\angle BAC|$$

$$(4\sqrt{3})^2 = |AC|^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot |AC| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$|AC|^2 + 6 \cdot |AC| - 12 = 0$$

$$|AC| = -3 + \sqrt{21} \quad \vee \quad |AC| = -3 - \sqrt{21} < 0$$

Zatem $|AC| = -3 + \sqrt{21}$.

Sposób II

Oznaczmy przez R promień okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

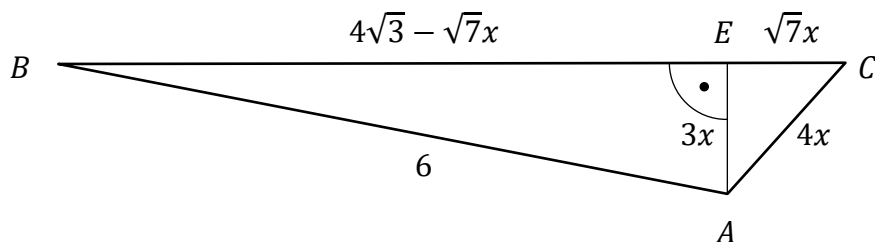
$$\frac{|AB|}{\sin|\angle ACB|} = 2R$$

$$\frac{6}{\sin|\angle ACB|} = 8$$

Stąd $\sin|\angle ACB| = \frac{3}{4}$.

Niech E będzie spodkiem wysokości poprowadzonej w trójkącie ABC z wierzchołka A na bok BC .

Oznaczmy $|AE| = 3x$. Wtedy $|AC| = 4x$, $|EC| = \sqrt{7}x$, $|BE| = 4\sqrt{3} - \sqrt{7}x$ (zobacz rysunek).



Stosujemy do trójkąta AEB twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy

$$(4\sqrt{3} - \sqrt{7}x)^2 + (3x)^2 = 6^2$$

$$16x^2 - 8\sqrt{21}x + 12 = 0$$

$$4x^2 - 2\sqrt{21}x + 3 = 0$$

$$x = \frac{2\sqrt{21} - 6}{8} \quad \vee \quad x = \frac{2\sqrt{21} + 6}{8}$$

$$4x = \sqrt{21} - 3 \quad \vee \quad 4x = \sqrt{21} + 3$$

Ponieważ $\sqrt{21} + 3 > 7 > 4\sqrt{3} = |BC|$, więc ostatecznie $|AC| = \sqrt{21} - 3$.

Sposób III

Oznaczmy przez R promień okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{|BC|}{\sin|\sphericalangle BAC|} = 2R$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin|\sphericalangle BAC|} = 8$$

Stąd $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$ lub $|\sphericalangle BAC| = 120^\circ$.

Długość boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o promieniu R jest równa

$R\sqrt{3} = 4\sqrt{3} = |BC|$. Niech D będzie wierzchołkiem trójkąta równobocznego BCD

wpisanego w dany okrąg. Ponieważ $|AB| = 6$, więc $A \neq D$. Gdyby wierzchołek A leżał na krótszym z łuków BD , to wówczas AC byłby najdłuższym bokiem trójkąta ABC . Gdyby wierzchołek A leżał na krótszym z łuków CD , to wówczas AB byłby najdłuższym bokiem trójkąta ABC . Zatem A leży na krótszym z łuków BC okręgu i $|\sphericalangle BAC| = 120^\circ$.

Ponownie stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle ACB|} = 2R$$

$$\frac{6}{\sin|\sphericalangle ACB|} = 8$$

Stąd $\sin|\angle ACB| = \frac{3}{4}$.

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i otrzymujemy

$$\sin^2|\angle ACB| + \cos^2|\angle ACB| = 1$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2|\angle ACB| = 1$$

$$\cos|\angle ACB| = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \vee \quad \cos|\angle ACB| = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Ponieważ AB nie jest najdłuższym bokiem trójkąta, więc kąt ACB nie jest rozwarty

i dlatego $\cos|\angle ACB| = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Obliczamy $\sin|\angle ABC|$:

$$\begin{aligned} \sin|\angle ABC| &= \sin(180^\circ - |\angle BAC| - |\angle ACB|) = \sin(|\angle BAC| + |\angle ACB|) = \\ &= \sin|\angle BAC| \cdot \cos|\angle ACB| + \sin|\angle ACB| \cdot \cos|\angle BAC| = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-3 + \sqrt{21}}{8} \end{aligned}$$

Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy

$$\frac{|AC|}{\sin|\angle ABC|} = 2R$$

$$|AC| = 2R \cdot \sin|\angle ABC|$$

$$|AC| = 8 \cdot \frac{-3 + \sqrt{21}}{8} = -3 + \sqrt{21}$$

Uwaga:

Po obliczeniu $\cos|\angle ACB|$ można obliczyć $\cos|\angle ABC|$:

$$\begin{aligned} \cos|\angle ABC| &= \cos(180^\circ - |\angle BAC| - |\angle ACB|) = -\cos(|\angle BAC| + |\angle ACB|) = \\ &= -\cos|\angle BAC| \cdot \cos|\angle ACB| + \sin|\angle ACB| \cdot \sin|\angle BAC| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

Po zastosowaniu twierdzenia cosinusów otrzymujemy:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos|\angle ABC|$$

$$|AC|^2 = 6^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{8}$$

$$|AC| = \sqrt{30 - 6\sqrt{21}}$$

$$|AC| = \sqrt{(\sqrt{21} - 3)^2}$$

$$|AC| = \sqrt{21} - 3$$

Zadanie 11. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 6.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne [...].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{k\pi}{5}$ oraz $-\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$ oraz

$$\frac{5}{6}\pi + 2\pi k, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

3 pkt – rozwiązanie równania $\sin(5x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $\frac{k\pi}{5}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
ALBO

– rozwiązanie równania $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $-\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$ lub $\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

2 pkt – przekształcenie równoważne równania do postaci alternatywy dwóch równań

$$\text{trygonometrycznych: } \sin(5x) = 0 \text{ lub } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1 pkt – zastosowanie wzorów na sinus sumy i różnicy kątów i przekształcenie równania do postaci

$$\sin(5x) \cos x + \cos(5x) \sin x + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(5x) \cos x - \cos(5x) \sin x = 0$$

ALBO

– zastosowanie wzoru na sumę sinusów i przekształcenie równania do postaci

$$2 \sin \frac{6x+4x}{2} \cos \frac{6x-4x}{2} + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) = 0.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązaniaSposób I

Stosujemy wzory na sinus sumy oraz różnicy kątów i przekształcamy równanie równoważnie, otrzymując:

$$\sin(6x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(4x) = 0$$

$$\sin(5x + x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(5x - x) = 0$$

$$\sin(5x) \cos x + \cos(5x) \sin x + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(5x) \cos x - \cos(5x) \sin x = 0$$

$$\sin(5x) \cdot (2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\sin(5x) = 0 \quad \vee \quad 2 \cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$5x = k\pi \quad \vee \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{k\pi}{5} \quad \vee \quad x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi k \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Sposób II

Stosujemy wzór na sumę sinusów i przekształcamy równanie równoważnie, otrzymując:

$$\sin(6x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(4x) = 0$$

$$2 \sin \frac{6x + 4x}{2} \cos \frac{6x - 4x}{2} + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) = 0$$

$$2 \sin(5x) \cos x + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) = 0$$

$$\sin(5x) \cdot (2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\sin(5x) = 0 \quad \vee \quad 2 \cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$5x = k\pi \quad \vee \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{k\pi}{5} \quad \vee \quad x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi k \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 12. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 9.1) rozpoznaje w graniastosłupach kąty między odcinkami [...]; 9.3) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków [...], pól powierzchni [...].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{\sqrt{3}a^2}{2} + 3\sqrt{2}a^2$.

3 pkt – wyznaczenie wysokości graniastosłupa: $a\sqrt{2}$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (wysokością graniastosłupa), np.

$$(H^2 + a^2) + (H^2 + a^2) - 2 \cdot \sqrt{H^2 + a^2} \cdot \sqrt{H^2 + a^2} \cdot \frac{5}{6} = a^2$$

1 pkt – obliczenie cosinusa kąta α : $\frac{5}{6}$

ALBO

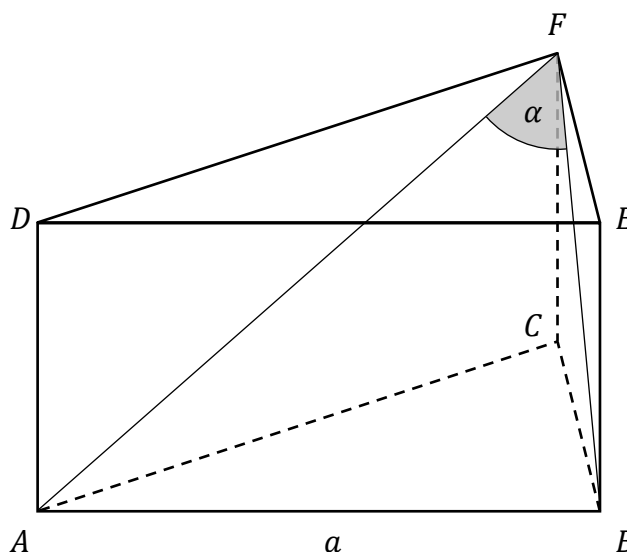
– zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta ABF i zapisanie równania

$$|AF|^2 + |BF|^2 - 2 \cdot |AF| \cdot |BF| \cdot \cos \alpha = a^2.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Oznaczmy ponadto przez H wysokość graniastosłupa.

Korzystamy z tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ i obliczamy $\cos \alpha$:

$$\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{25}{36}$$

więc $\cos \alpha = \frac{5}{6}$, gdyż α jest kątem ostrym.

Stosujemy do trójkąta ABF twierdzenie cosinusów, a następnie korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i otrzymujemy:

$$|AF|^2 + |BF|^2 - 2 \cdot |AF| \cdot |BF| \cdot \cos \alpha = a^2$$

$$(H^2 + a^2) + (H^2 + a^2) - 2 \cdot \sqrt{H^2 + a^2} \cdot \sqrt{H^2 + a^2} \cdot \frac{5}{6} = a^2$$

$$\frac{1}{3} \cdot (H^2 + a^2) = a^2$$

$$H = a\sqrt{2}$$

Obliczamy pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa:

$$P = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2} + 3\sqrt{2}a^2$$

Zadanie 13. (0–6)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.R1) oblicza odległość punktu od prostej.

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na obliczeniu współrzędnych punktów A oraz B . Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.

Podział punktów za pierwszy etap rozwiązania:

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktów A oraz B przecięcia paraboli i prostej

$$3x + y = 2 = 0: A = (-3, 7) \text{ oraz } B = (2, -8).$$

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (jedną ze współrzędnych punktu A lub B),

$$\text{które wynika z układu równań } \begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{cases}, \text{ np.}$$

$$3x + x^2 - 2x - 8 + 2 = 0, \quad y = \left(-\frac{y+2}{3}\right)^2 + \frac{2(y+2)}{3} - 8.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Drugi etap polega na obliczeniu współrzędnych punktu C . Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu C : $C = (6, -2)$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (pierwszą/drugą współrzędną punktu C), np.

$$\frac{|3c + (-\frac{1}{2}c + 1) + 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}.$$

1 pkt – uzależnienie drugiej/pierwszej współrzędnej punktu C od pierwszej/drugiej

$$\text{współrzędnej, np. } C = \left(c, -\frac{1}{2}c + 1\right).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na obliczeniu długości boku BC .

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – obliczenie długości boku BC równoległoboku: $|BC| = 2\sqrt{13}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy współrzędne punktów przecięcia paraboli z prostą o równaniu $3x + y + 2 = 0$:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ 3x + x^2 - 2x - 8 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ x = -3 \vee x = 2 \end{cases}$$

Stąd $A = (-3, 7)$ oraz $B = (2, -8)$.

Punkt C leży na prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 1$ i ma pierwszą współrzędną dodatnią, więc $C = (c, -\frac{1}{2}c + 1)$ przy pewnym $c > 0$.

Korzystamy ze wzoru na odległość punktu od prostej i otrzymujemy kolejno:

$$\frac{|3c + (-\frac{1}{2}c + 1) + 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

$$\frac{|2,5c + 3|}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

$$|2,5c + 3| = 18$$

$$c = 6 \vee c = -\frac{42}{5}$$

Zatem $C = (6, -2)$.

Obliczamy długość boku BC :

$$|BC| = \sqrt{(6 - 2)^2 + (-2 + 8)^2} = 2\sqrt{13}$$

Zadanie 14. (0–6)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 3.R1) stosuje wzory Viète'a; 3.R2) rozwiązuje równania [...] kwadratowe z parametrem.

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na zapisaniu warunku $\Delta > 0$ w postaci nierówności z niewiadomą m i rozwiązaniu tej nierówności. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – zapisanie warunku $\Delta > 0$ w postaci nierówności z niewiadomą m i rozwiązanie tej nierówności: $(m+1)^2 + 4 \cdot (3-m) \cdot (m+1)^2 > 0$ oraz

$$m \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{13}{4}\right).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m , dla których jest spełniony warunek $x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

4 pkt – wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , dla których jest spełniony warunek

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7: 1, \frac{-3-2\sqrt{42}}{3}, \frac{-3+2\sqrt{42}}{3}.$$

3 pkt – zapisanie równania z niewiadomą m w postaci $\frac{-3m^3-3m^2+59m-53}{(3-m)^2} = 0$ lub

$3m^3 + 3m^2 - 59m + 53 = 0$ **oraz** wyznaczenie jednego z rozwiązań tego równania (np. $m = 1$) i podzielenie wielomianu $3m^3 + 3m^2 - 59m + 53$ przez odpowiedni dwumian, np. $(3m^3 + 3m^2 - 59m + 53):(m-1) = 3m^2 + 6m - 53$
ALBO

– zapisanie równania z niewiadomą m w postaci $\frac{-3m^3-3m^2+59m-53}{(3-m)^2} = 0$ lub

$3m^3 + 3m^2 - 59m + 53 = 0$ **oraz** zastosowanie metody grupowania i zapisanie wielomianu $3m^3 + 3m^2 - 59m + 53$ w postaci iloczynu co najmniej dwóch wielomianów stopni dodatnich, np. $(m-1)(3m^2 + 6m - 53)$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą m , wynikającego z warunku

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7, \text{ np. } \left(-\frac{m+1}{3-m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-(m+1)^2}{3-m} = \frac{-(m+1)^2}{3-m} + 7.$$

1 pkt – przekształcenie warunku $x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np. $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na zapisaniu warunku $3 - m \neq 0$ oraz wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m , które spełniają jednocześnie warunki: $3 - m \neq 0$ i $\Delta > 0$, i $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7$.

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – zapisanie warunku $3 - m \neq 0$ i poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , które spełniają jednocześnie warunki $3 - m \neq 0$ i $\Delta > 0$,

$$\text{i } (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7: 1, \frac{-3-2\sqrt{42}}{3}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

I etap

Równanie $(3 - m)x^2 + (m + 1)x - (m + 1)^2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste tylko wtedy, gdy $3 - m \neq 0$ i wyróżnik trójmianu $(3 - m)x^2 + (m + 1)x - (m + 1)^2$ jest dodatni. Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$(m + 1)^2 + 4 \cdot (3 - m)(m + 1)^2 > 0$$

$$(m + 1)^2 [1 + 4 \cdot (3 - m)] > 0$$

$$(m + 1)^2 \cdot (13 - 4m) > 0$$

$$-4 \cdot (m + 1)^2 \cdot \left(m - \frac{13}{4}\right) > 0$$

$$m \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{13}{4}\right)$$

II etap

Sposób I

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m , dla których jest spełniony warunek

$x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 7$, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7$$

$$\left(-\frac{m+1}{3-m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-(m+1)^2}{3-m} = \frac{-(m+1)^2}{3-m} + 7$$

$$\left(\frac{m+1}{m-3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{(m+1)^2}{m-3} - 7 = 0$$

$$\frac{(m+1)^2 - 3 \cdot (m+1)^2(m-3) - 7(m-3)^2}{(m-3)^2} = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - 3(m^2 + 2m + 1)(m - 3) - 7(m^2 - 6m + 9) = 0 \wedge m \neq 3$$

$$\begin{aligned}
-3m^3 - 3m^2 + 59m - 53 &= 0 \quad \wedge \quad m \neq 3 \\
-3m^3 + 3m - 3m^2 + 3m + 53m - 53 &= 0 \quad \wedge \quad m \neq 3 \\
-3m(m^2 - 1) - 3m(m - 1) + 53(m - 1) &= 0 \quad \wedge \quad m \neq 3 \\
(m - 1)[-3m(m + 1) - 3m + 53] &= 0 \quad \wedge \quad m \neq 3 \\
(m - 1)[-3m^2 - 6m + 53] &= 0 \quad \wedge \quad m \neq 3 \\
\left(m = 1 \vee m = \frac{-3 - 2\sqrt{42}}{3} \vee m = \frac{-3 + 2\sqrt{42}}{3}\right) &\wedge \quad m \neq 3 \\
m = 1 \vee m = \frac{-3 - 2\sqrt{42}}{3} \vee m = \frac{-3 + 2\sqrt{42}}{3}
\end{aligned}$$

Sposób II

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m , dla których jest spełniony warunek $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 7$, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 &= x_1x_2 + 7 \\
\left(-\frac{m+1}{3-m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-(m+1)^2}{3-m} &= \frac{-(m+1)^2}{3-m} + 7 \\
\left(\frac{m+1}{m-3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{(m+1)^2}{m-3} - 7 &= 0 \\
\frac{(m+1)^2 - 3 \cdot (m+1)^2(m-3) - 7(m-3)^2}{(m-3)^2} &= 0 \\
m^2 + 2m + 1 - 3(m^2 + 2m + 1)(m-3) - 7(m^2 - 6m + 9) &= 0 \quad \wedge \quad m \neq 3 \\
-3m^3 - 3m^2 + 59m - 53 &= 0 \quad \wedge \quad m \neq 3
\end{aligned}$$

Zauważamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $-3m^3 - 3m^2 + 59m - 53$. Dzielimy wielomian $-3m^3 - 3m^2 + 59m - 53$ przez dwumian $m - 1$. Dzielienie to możemy wykonać, korzystając np. z algorytmu Hornera

	-3	-3	59	-53
1	-3	-6	53	0

Otrzymujemy $(m - 1)(-3m^2 - 6m + 53) = 0$. Stąd $m = 1$ lub $m = \frac{-3 - 2\sqrt{42}}{3}$, lub $m = \frac{-3 + 2\sqrt{42}}{3}$.

III etap

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru $m \neq 3$, które jednocześnie spełniają warunki

$$m \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{13}{4}\right) \text{ oraz } m \in \left\{1, \frac{-3 - 2\sqrt{42}}{3}, \frac{-3 + 2\sqrt{42}}{3}\right\}: m \in \left\{1, \frac{-3 - 2\sqrt{42}}{3}\right\}.$$

Zadanie 15. (0–7)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 11.R6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Zasady oceniania

Część a)

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – zapisanie wysokości trapezu w zależności od długości x odcinka łączącego środki ramion trapezu: $|DG| = \sqrt{100 - x^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Część b)

1 pkt – wyznaczenie dziedziny funkcji P : $(0, 10)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Część c)

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja g przyjmuje wartość największą dla $x = 5\sqrt{2}$ i obliczenie wartości największej funkcji P : 50.

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja g przyjmuje wartość największą dla $x = 5\sqrt{2}$

ALBO

– przekształcenie nierówności $\sqrt{\frac{x^2 + \left(\sqrt{100 - x^2}\right)^2}{2}} \geq \sqrt{x \cdot \sqrt{100 - x^2}}$ do postaci

$50 \geq x \cdot \sqrt{100 - x^2}$ oraz zapisanie, że równość zachodzi tylko wtedy, gdy liczby x oraz $\sqrt{100 - x^2}$ są równe,

ALBO

– przekształcenie trójmianu $100x^2 - x^4$ do postaci $-(x^2 - 50)^2 + 2500$ i zapisanie, że $g(x) \leq 2500$, **oraz** rozwiązanie równania $x^2 - 50 = 0$ w zbiorze liczb dodatnich: $x = 5\sqrt{2}$.

2 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji g : $x = 5\sqrt{2}$

ALBO

– obliczenie wartości x , dla której zachodzi równość średniej kwadratowej i geometrycznej liczb dodatnich x oraz $\sqrt{100 - x^2}$: $x = 5\sqrt{2}$,

ALBO

– przekształcenie nierówności $\sqrt{\frac{x^2 + (\sqrt{100-x^2})^2}{2}} \geq \sqrt{x \cdot \sqrt{100-x^2}}$ do postaci

$$50 \geq x \cdot \sqrt{100-x^2},$$

ALBO

– przekształcenie trójmianu $100x^2 - x^4$ do postaci $-(x^2 - 50)^2 + 2500$ i zapisanie, że $g(x) \leq 2500$,

ALBO

– przekształcenie trójmianu $100x^2 - x^4$ do postaci $-(x^2 - 50)^2 + 2500$ i rozwiązanie równania $x^2 - 50 = 0$ w zbiorze liczb dodatnich: $x = 5\sqrt{2}$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji g : $g'(x) = 200x - 4x^3$

ALBO

– zapisanie nierówności między średnią kwadratową a geometryczną liczb x oraz $\sqrt{100-x^2}$:

$$\sqrt{\frac{x^2 + (\sqrt{100-x^2})^2}{2}} \geq \sqrt{x \cdot \sqrt{100-x^2}}$$

ALBO

– przekształcenie trójmianu $100x^2 - x^4$ do postaci $-(x^2 - 50)^2 + 2500$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi do części c):

1. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość największą dla wyznaczonej wartości x , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej oraz:

– opisuje (słownie lub graficznie - np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji g
LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja g ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość

LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja g ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

Jeśli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia to za część c) może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

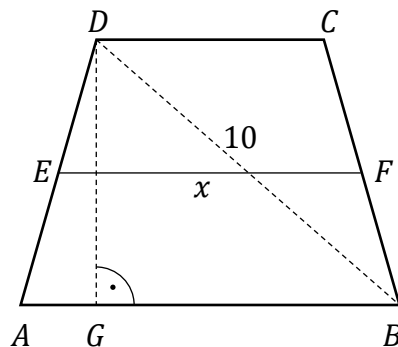
2. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-”, znak pochodnej.

Przykładowe pełne rozwiązania

a)

Rozpatrzmy trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD , ramionach AD i BC , w którym każda z przekątnych ma długość 10. Niech DG będzie wysokością trapezu

poprowadzoną z wierzchołka D na podstawę AB trapezu. Oznaczmy przez E środek boku AD oraz przez F – środek boku BC (zobacz rysunek). Niech x oznacza długość odcinka łączącego środki ramion trapezu.



Trapez jest równoramienny, więc $|BG| = |AB| - |AG| = \frac{|AB|+|CD|}{2} = |EF| = x$.

Stosujemy do trójkąta BDG twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy

$$|BG|^2 + |DG|^2 = |BD|^2$$

$$|DG| = \sqrt{|BD|^2 - |BG|^2}$$

$$|DG| = \sqrt{100 - x^2}$$

Zatem pole P trapezu jest równe $P = \frac{|AB|+|CD|}{2} \cdot |DG| = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$.

b)

Ponieważ $|EF| = x > 0$ oraz $|DG| > 0$ i $|DG|^2 = |BD|^2 - |BG|^2 = 100 - x^2$, więc $x > 0$ i $100 - x^2 > 0$. Stąd $x \in (0, 10)$. Dziedziną funkcji P jest zbiór $(0, 10)$.

c)

Sposób I

Przekształcamy wzór funkcji P do postaci $P(x) = \sqrt{100x^2 - x^4}$, gdzie $x \in (0, 10)$.

Obliczamy największą wartość funkcji P .

Ponieważ funkcja $f(t) = \sqrt{t}$ określona dla $t \geq 0$ jest rosnąca, więc funkcja P osiąga wartość największą dla takiego argumentu x , dla którego funkcja $g(x) = 100x^2 - x^4$ określona dla $x \in (0, 10)$ osiąga wartość największą.

Wyznaczamy pochodną funkcji g : $g'(x) = 200x - 4x^3$ dla $x \in (0, 10)$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji g :

$$g'(x) = 0$$

$$200x - 4x^3 = 0$$

$$-4x(x^2 - 50) = 0$$

$$x = 0 \notin (0, 10) \vee x = -5\sqrt{2} \notin (0, 10) \vee x = 5\sqrt{2} \in (0, 10)$$

Badamy znak pochodnej:

$$g'(x) < 0 \text{ dla } x \in (5\sqrt{2}, 10)$$

$$g'(x) > 0 \text{ dla } x \in (0, 5\sqrt{2}).$$

Zatem funkcja g jest rosnąca w przedziale $(0, 5\sqrt{2})$ oraz malejąca w przedziale $(5\sqrt{2}, 10)$.

Stąd dla $x = 5\sqrt{2}$ funkcja g osiąga wartość największą.

Zatem funkcja P osiąga wartość największą dla $x = 5\sqrt{2}$. Wtedy

$$P(5\sqrt{2}) = \sqrt{100 \cdot (5\sqrt{2})^2 - (5\sqrt{2})^4} = \sqrt{5000 - 2500} = \sqrt{2500} = 50$$

Spośród rozważanych trapezów największe pole równe 50 ma trapez, w którym odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość $5\sqrt{2}$.

Sposób II

Gdy $x \in (0, 10)$, to liczby x oraz $\sqrt{100 - x^2}$ są dodatnie. Z nierówności między średnią kwadratową a geometryczną liczb dodatnich x i $\sqrt{100 - x^2}$ otrzymujemy:

$$\sqrt{\frac{x^2 + (\sqrt{100 - x^2})^2}{2}} \geq \sqrt{x \cdot \sqrt{100 - x^2}} \quad /(\quad)^2$$

$$\frac{x^2 + 100 - x^2}{2} \geq x \cdot \sqrt{100 - x^2}$$

$$50 \geq P(x)$$

przy czym równość zachodzi tylko dla tych x , dla których $x = \sqrt{100 - x^2}$ i jednocześnie $x \in (0, 10)$, tj. dla $x = 5\sqrt{2}$.

Zatem funkcja P osiąga wartość największą dla $x = 5\sqrt{2}$ i wtedy

$$P(5\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2} = 50$$

Spośród rozważanych trapezów największe pole równe 50 ma trapez, w którym odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość $5\sqrt{2}$.

Sposób III

Przekształcamy wzór funkcji P do postaci $P(x) = \sqrt{100x^2 - x^4}$, gdzie $x \in (0, 10)$.

Obliczamy największą wartość funkcji P .

Ponieważ funkcja $f(t) = \sqrt{t}$ określona dla $t \geq 0$ jest rosnąca, więc funkcja P osiąga wartość największą dla takiego argumentu x , dla którego funkcja $g(x) = 100x^2 - x^4$ określona dla $x \in (0, 10)$ osiąga wartość największą.

Przekształcamy wzór funkcji g :

$$g(x) = 100x^2 - x^4 = -(x^4 - 100x^2 + 2500) + 2500 = -(x^2 - 50)^2 + 2500$$

Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny, więc $g(x) \leq 2500$, przy czym równość zachodzi tylko gdy $x^2 - 50 = 0$ oraz $x \in (0, 10)$, tj. dla $x = 5\sqrt{2}$.

Stąd dla $x = 5\sqrt{2}$ funkcja g osiąga wartość największą.

Zatem funkcja P osiąga wartość największą dla $x = 5\sqrt{2}$. Wtedy

$$P(5\sqrt{2}) = \sqrt{100 \cdot (5\sqrt{2})^2 - (5\sqrt{2})^4} = \sqrt{5000 - 2500} = \sqrt{2500} = 50$$

Spośród rozważanych trapezów największe pole równe 50 ma trapez, w którym odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość $5\sqrt{2}$.