CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	EMAP-R0-100, EMAP-R0-200, EMAP-R0-300, EMAP-R0-400, EMAP-R0-600, EMAP-R0-700, EMAP-R0-Q00, EMAP-R0-Z00
Termin egzaminu:	2 czerwca 2023 r.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 2. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 3. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 4. (0–1)

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

ZADANIE OTWARTE (KODOWANE)

Zadanie 5. (0–2)

Zasady oceniania
2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

1	3	3

ZADANIA OTWARTE (NIEKODOWANE)

Uwagi ogólne:
1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 6. (0–3)

Zasady oceniania
3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x_0 = 2$ oraz $y = 17x - 16$.
2 pkt – obliczenie odciętej x_0 punktu P i wyznaczenie pochodnej funkcji f: $x_0 = 2$ oraz $f'(x) = 6x^2 - 8x + 9$.
1 pkt – obliczenie odciętej x_0 punktu P: $x_0 = 2$
ALBO
– wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = 6x^2 - 8x + 9$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Obliczamy odciętą x_0 punktu P:

$$18 = 2x_0^3 - 4x_0^2 + 9x_0$$

$$2x_0^3 - 4x_0^2 + 9x_0 - 18 = 0$$

$$2x_0^2(x_0 - 2) + 9(x_0 - 2) = 0$$

$$(2x_0^2 + 9)(x_0 - 2) = 0$$

$$2x_0^2 + 9 = 0 \quad \text{lub} \quad x_0 - 2 = 0$$

Ponieważ $2x_0^2 + 9 > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x_0, więc $x_0 = 2$.

Wyznaczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = 6x^2 - 8x + 9$$

Wyznaczamy równanie kierunkowe stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P. Obliczamy współczynnik kierunkowy a w równaniu stycznej:

$$a = f'(2) = 17$$

Obliczamy współczynnik b w równaniu stycznej:

$$18 = 17 \cdot 2 + b$$

$$b = -16$$

Styczna ma równanie $y = 17x - 16$.

Zadanie 7. (0–3)

Zasady oceniania

3 pkt – spełnienie kryterium oceniania za 2 punkty i uzasadnienie prawdziwości nierówności $\frac{(a-2)^2(a+4)}{a} \geq 0$ lub $(a-2)^2(a+4) \geq 0$, lub $a(a-2)^2(a+4) \geq 0$ z powołaniem się na założenie (dla sposobu I)

ALBO

– spełnienie kryterium oceniania za 2 punkty i przekształcenie nierówności $\frac{a^2+\frac{8}{a}+\frac{8}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{8}{a} \cdot \frac{8}{a}}$ do postaci tezy (dla sposobu II),

ALBO

– spełnienie kryterium oceniania za 2 punkty oraz obliczenie $f(2)$: $f(2) = 12$ (dla sposobu III).

2 pkt – przekształcenie nierówności $a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$ do postaci $\frac{(a-2)^2(a+4)}{a} \geq 0$ lub $(a-2)^2(a+4) \geq 0$, lub $a(a-2)^2(a+4) \geq 0$ (dla sposobu I)

ALBO

– spełnienie kryterium oceniania za 1 punkt oraz zapisanie wielomianu $a^3 - 12a + 16$ w postaci $(a-2)^2(a+4)$ (dla sposobu I),

ALBO

– zapisanie, że dla każdego $a > 0$ liczby $a^2, \frac{8}{a}, \frac{8}{a}$ są dodatnie oraz zapisanie nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną liczb dodatnich $a^2, \frac{8}{a}, \frac{8}{a}$:
$\frac{a^2+\frac{8}{a}+\frac{8}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{8}{a} \cdot \frac{8}{a}}$ (dla sposobu II),

ALBO

– obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji f oraz wyznaczenie w przedziale $(0, +\infty)$ argumentu, dla którego funkcja osiąga w tym przedziale wartość najmniejszą (wraz z uzasadnieniem): $a = 2$ (dla sposobu III).

1 pkt – przekształcenie nierówności $a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$ do postaci $\frac{a^3-12a+16}{a} \geq 0$ lub $a^3 - 12a + 16 \geq 0$, lub $a(a^3 - 12a + 16) \geq 0$ (dla sposobu I)

ALBO

– zapisanie, że dla każdego $a > 0$ liczby $a^2, \frac{8}{a}, \frac{8}{a}$ są dodatnie (dla sposobu II),

ALBO

– obliczenie pochodnej funkcji f określonej wzorem $f(a) = a^2 + \frac{16}{a}$ dla $a > 0$ (lub w szerszym zakresie), np. $f'(a) = 2a - \frac{16}{a^2}$ (dla sposobu III).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano nieprawidłową metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeśli zdający opiera swoje rozwiązanie na nierówności między średnimi (sposób III) i stosuje nierówność między średnimi liczb $a^2, \frac{8}{a}, \frac{8}{a}$ bez zapisania, że liczby te są dodatnie, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy nierówność $a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$:

$$\frac{a^3}{a} + \frac{16}{a} - \frac{12a}{a} \geq 0$$

$$\frac{a^3 - 12a + 16}{a} \geq 0$$

$$a(a^3 - 12a + 16) \geq 0 \quad \text{i} \quad a \neq 0$$

Zauważamy, że pierwiastkiem wielomianu $W(a) = a^3 - 12a + 16$ jest liczba 2. Stąd $W(a) = (a-2)(a^2 + 2a - 8)$. Ponieważ pierwiastkami trójmianu kwadratowego $a^2 + 2a - 8$ są liczby 2 i (-4), więc $W(a) = (a-2)^2(a+4)$. Zatem nierówność $a(a^3 - 12a + 16) \geq 0$ można równoważnie zapisać w postaci

$$a(a-2)^2(a+4) \geq 0$$

Dla każdej liczby dodatniej a wyrażenie $(a-2)^2$ jest liczbą nieujemną, natomiast wyrażenie $(a+4)$ jest liczbą dodatnią. Zatem dla każdej liczby dodatniej a wyrażenie $a(a-2)^2(a+4)$ jest nieujemne jako iloczyn liczb nieujemnych. Oznacza to, że nierówność $a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$ jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej a. To należało wykazać.

Inna realizacja rozkładu wielomianu $a^3 - 12a + 16$ na czynniki:

$$a^3 - 12a + 16 = a^3 - 16a + 4a + 16 = a(a^2 - 16) + 4(a+4) =$$

$$= a(a-4)(a+4) + 4(a+4) = (a+4)[a(a-4) + 4] =$$

$$= (a+4)(a^2 - 4a + 4) = (a+4)(a-2)^2$$

Sposób II

Dla każdego $a > 0$ liczby $a^2, \frac{8}{a}, \frac{8}{a}$ są dodatnie. Korzystamy z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną liczb $a^2, \frac{8}{a}, \frac{8}{a}$ i otrzymujemy:

$$\frac{a^2 + \frac{8}{a} + \frac{8}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{8}{a} \cdot \frac{8}{a}}$$

$$\frac{a^2 + \frac{16}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{64}$$

$$a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$$

To należało wykazać.

Sposób III

Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(a) = a^2 + \frac{16}{a}$ dla każdej liczby rzeczywistej $a > 0$.

Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(a) = 2a - \frac{16}{a^2} = \frac{2a^3 - 16}{a^2}$$

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji f:

$$\frac{2a^3 - 16}{a^2} = 0$$

$$2a^3 - 16 = 0$$

$$a = 2$$

Ponieważ $f'(a) > 0$ dla $a \in (2, +\infty)$ oraz $f'(a) < 0$ dla $a \in (0, 2)$, więc funkcja f jest malejąca w przedziale $(0, 2\rangle$ oraz jest rosnąca w przedziale $\langle 2, +\infty)$.

Zatem dla argumentu $a = 2$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą $f(2) = 2^2 + \frac{16}{2} = 12$. Stąd $f(a) \geq 12$ dla każdej liczby dodatniej a.

To oznacza, że nierówność $a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$ jest prawdziwa dla każdego $a > 0$.

Zadanie 8. (0–3)

Zasady oceniania

3 pkt – spełnienie kryterium oceniania za 2 punkty oraz uzasadnienie, że $|AC| = |BC|$.

2 pkt – wyznaczenie długości odcinków AP, AQ, BD, CD, CQ w zależności od tej samej zmiennej, np. $|AP| = 5x$, $|AQ| = 5x$, $|BD| = x$, $|CD| = 2x$, $|CQ| = 2x$.

1 pkt – zapisanie równości wynikającej z twierdzenia o odcinkach stycznych: $|BD| = |BP|$ (lub $|AP| = |AQ|$, lub $|CQ| = |CD|$).

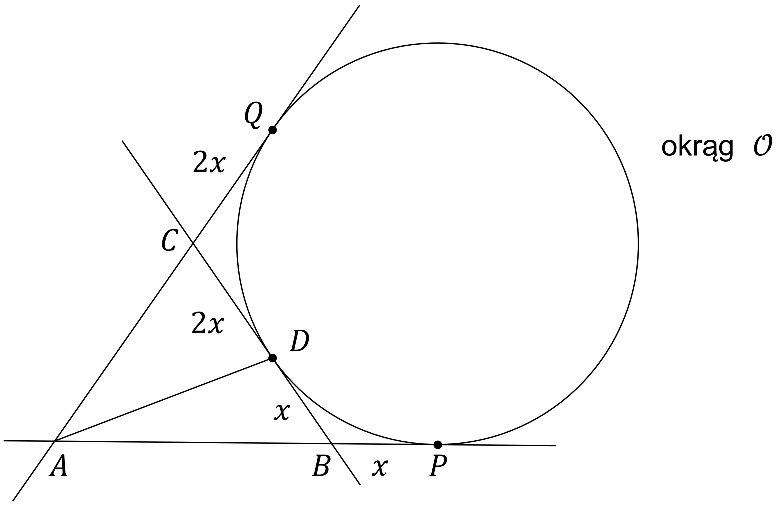
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech $|BP| = x$.

Z twierdzenia o odcinkach stycznych wnioskujemy, że $|BD| = |BP| = x$.

Z założenia $|CD| = 2 \cdot |BD|$ otrzymujemy $|CD| = 2x$. Z twierdzenia o odcinkach stycznych wnioskujemy, że $|CQ| = |CD| = 2x$ (zobacz rysunek).



Ponieważ $|AQ| = 5 \cdot |BP|$, więc $|AQ| = 5x$. Ponownie z twierdzenia o odcinkach stycznych wnioskujemy, że $|AP| = |AQ| = 5x$.

Zatem $|AC| = |AQ| - |CQ| = 5x - 2x = 3x$ oraz $|BC| = |BD| + |CD| = x + 2x = 3x$.

Wobec tego $|AC| = |BC|$, więc trójkąt ABC jest równoramienny. To należało wykazać.

Zadanie 9. (0–4)

Zasady oceniania

4 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości zmiennej x, dla których suma szeregu istnieje ($x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$) oraz poprawne wyznaczenie wszystkich wartości zmiennej x, dla których suma jest równa $\frac{15}{2}$: $x = 6$.

3 pkt – wyznaczenie zbioru wszystkich wartości x, dla których istnieje skończona suma szeregu ($x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$) oraz zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego, wyznaczenie tej sumy i zapisanie równania z niewiadomą x: $\frac{2x}{1-\left(-\frac{3}{x-1}\right)} = \frac{15}{2}$

ALBO

– zapisanie warunku zbieżności szeregu ($|q| < 1$) oraz zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego, wyznaczenie tej sumy, zapisanie równania z niewiadomą x ($\frac{2x}{1-\left(-\frac{3}{x-1}\right)} = \frac{15}{2}$) i rozwiązanie tego równania: $x = -\frac{5}{4}$, $x = 6$.

2 pkt – wyznaczenie zbioru wszystkich wartości x, dla których istnieje skończona suma szeregu: $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

ALBO

– zapisanie warunku zbieżności szeregu ($|q| < 1$) oraz zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego, wyznaczenie tej sumy i zapisanie równania z niewiadomą x:

$$\frac{2x}{1-\left(-\frac{3}{x-1}\right)} = \frac{15}{2}$$

1 pkt – zapisanie ilorazu: $q = -\frac{3}{x-1}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeśli zdający rozwiąże odpowiednie równanie i zapisze: $x = -\frac{5}{4} \vee x = 6$, a następnie obliczy iloraz szeregu dla każdej z wyznaczonych wartości zmiennych i na tej podstawie dokona właściwego wyboru rozwiązania, to otrzymuje **4 punkty**.

2. Jeśli zdający rozwiąże zadanie bez rozważenia warunku $|q| < 1$, to może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

3. Jeśli zdający zapisze poprawny warunek zbieżności szeregu: $\left|-\frac{3}{x-1}\right| < 1$, ale popełni błąd przy wyznaczaniu przedziału zbieżności i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać **3 punkty**.

4. Jeżeli zdający popełni błąd przy wyznaczaniu ilorazu ciągu, który będzie wyrażeniem wymiernym zmiennej x, np. zapisze, że $q = -\frac{3x}{x-1}$, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

5. Jeśli zdający zapisze dany szereg jako sumę dwóch szeregów postaci $2x + \frac{18x}{(x-1)^2} + \frac{172x}{(x-1)^4} + \ldots$ oraz $-\frac{6x}{x-1} - \frac{54x}{(x-1)^3} - \frac{516x}{(x-1)^5} - \ldots$ bez odpowiedniego komentarza i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, obliczając sumę dwóch szeregów, to może otrzymać maksymalnie **3 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Pierwszy wyraz i iloraz tego szeregu są równe, odpowiednio, $a_1 = 2x$ oraz $q = -\frac{3}{x-1}$. Ponieważ $x \neq 1$ i $x \neq 0$, to szereg ten jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\left|-\frac{3}{x-1}\right| < 1$, czyli $|x-1| > 3$. Stąd $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$.

Wtedy suma S tego szeregu jest skończona i równa

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2x}{1-\left(-\frac{3}{x-1}\right)} = \frac{2x(x-1)}{x+2}$$

Rozwiązujemy równanie $\frac{2x(x-1)}{x+2} = \frac{15}{2}$ w zbiorze $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$:

$$\frac{2x(x-1)}{x+2} = \frac{15}{2}$$

$$4x(x-1) = 15(x+2)$$

$$4x^2 - 19x - 30 = 0$$

$$x = -\frac{5}{4} \notin (-\infty, -2) \cup (4, +\infty) \quad \text{lub} \quad x = 6 \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$$

Zatem $x = 6$.

Zadanie 10. (0–4)

Zasady oceniania

4 pkt – poprawne metoda rozwiązania równania i poprawny wynik: $-\frac{\pi}{8}, \ \frac{3\pi}{8}, -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \ \frac{\pi}{4}$.

3 pkt – rozwiązanie równania $\sin(5x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (lub równania $\cos x = \cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$)
w zbiorze liczb rzeczywistych: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ lub $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

ALBO

– przekształcenie równania do alternatywy elementarnych równań trygonometrycznych i rozwiązanie jednego z tych równań w zbiorze $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$,

ALBO

– przekształcenie równania do alternatywy elementarnych równań trygonometrycznych i rozwiązanie wszystkich równań tej alternatywy w zbiorze $\mathbb{R}$.

2 pkt – równoważne przekształcenie równania do postaci, która jest równością sinusów lub cosinusów, np. $\sin(5x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x = \cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$

ALBO

– zastosowanie wzoru na sumę sinusów lub na sumę cosinusów i przekształcenie równania do postaci alternatywy elementarnych równań trygonometrycznych, np. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ lub $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$ lub $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 0$.

1 pkt – zastosowanie wzoru redukcyjnego i przekształcenie równania do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna, np. $\sin(5x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$,
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) + \cos x = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>*Sposób I* (równość sinusów)</u>

Zapisujemy równanie w postaci równoważnej, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna zmiennej x:

$$\sin(5x) + \cos x = 0$$

$$\sin(5x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

$$\sin(5x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Ponieważ funkcja sinus jest nieparzysta, więc

$$\sin(5x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Stąd

$$5x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 5x = \pi - (x - \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Wyznaczamy rozwiązania równania $\sin(5x) + \cos x = 0$ w zbiorze $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$:

$$-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}$$

<u>*Sposób II* (poprzez sumę sinusów)</u>

Zapisujemy równanie w postaci równoważnej, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna zmiennej x:

$$\sin(5x) + \cos x = 0$$

$$\sin(5x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

Korzystamy ze wzoru na sumę sinusów i otrzymujemy

$$2\sin\left(\frac{5x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{5x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{lub} \quad \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = k\pi \quad \text{lub} \quad 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Wyznaczamy rozwiązania równania $\sin(5x) + \cos x = 0$ w zbiorze $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$:

$$-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}$$

Zadanie 11. (0–4)

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $n = 10$.

3 pkt – wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A w zależności od n: $P(A) = \frac{n^2-3n+4}{n^2}$.

2 pkt – wyznaczenie prawdopodobieństw zdarzeń A_1 oraz A_2 w zależności od n:

$P(A_1) = \frac{n-3}{n}$ oraz $P(A_2) = \frac{n-1}{n}$.

1 pkt – wyznaczenie prawdopodobieństw zdarzeń B oraz C w zależności od n:

$P(B) = \frac{n-2}{n}$ oraz $P(C) = \frac{2}{n}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:

B – zdarzenie polegające na tym, że w pierwszym losowaniu została wylosowana kula biała,

C – zdarzenie polegające na tym, że w pierwszym losowaniu została wylosowana kula czarna,

Z_1 – zawartość pudełka po wylosowaniu za pierwszym razem kuli białej i dołożeniu kuli czarnej,

Z_2 – zawartość pudełka po wylosowaniu za pierwszym razem kuli czarnej i dołożeniu kuli białej,

A_1 – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana z pudełka o zawartości Z_1 kula jest biała,

A_2 – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana z pudełka o zawartości Z_2 kula jest biała.

Wówczas Z_1: $n-3$ kul białych i 3 kule czarne, Z_2: $n-1$ kul białych i 1 kula czarna.

Wyznaczamy prawdopodobieństwa zdarzeń B, C, A_1 oraz A_2 :

$$P(B) = \frac{n-2}{n}, \quad P(C) = \frac{2}{n}, \quad P(A_1) = \frac{n-3}{n}, \quad P(A_2) = \frac{n-1}{n}$$

Zapisujemy prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że kula wylosowana z pudełka ze zmienioną zawartością jest biała:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(B) + P(A_2) \cdot P(C)$$

$$P(A) = \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-2}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{n^2-3n+4}{n^2}$$

Ponieważ $P(A) = \frac{37}{50}$, więc stąd otrzymujemy kolejno:

$$\frac{n^2-3n+4}{n^2} = \frac{37}{50}$$

$$50n^2 - 150n + 200 = 37n^2$$

$$13n^2 - 150n + 200 = 0$$

$$\Delta = 12100, \quad \sqrt{\Delta} = 110$$

$$n = \frac{150-110}{26} = \frac{40}{26} \quad \text{lub} \quad n = \frac{150+110}{26} = \frac{260}{26} = 10$$

Ponieważ liczba kul musi być liczbą naturalną większą niż 2, więc jedynym rozwiązaniem tego zadania jest $n = 10$.

Zadanie 12. (0–5)

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu warunku $\Delta > 0$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne rozwiązanie warunku $\Delta > 0$: $m \in \left(-\infty, \frac{1}{9}\right) \cup (1, +\infty)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Drugi etap polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

3 pkt – wyznaczenie tych wszystkich wartości m, dla których spełniony jest warunek $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$: $m \in \left(-4 - 2\sqrt{6}, 0\right) \cup \left(0, -4 + 2\sqrt{6}\right)$.

2 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m, która odpowiada warunkowi $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$, np. $\frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{(-2m+3)}{m}}{\left(\frac{-2m+3}{m}\right)^2} < 1$.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np. $\frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} < 1$ (lub innej równoważnej, ale zawierającej jedynie zmienne $x_1 + x_2$ oraz x_1x_2).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m, dla których spełnione są jednocześnie warunki: $\Delta > 0$ i $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$.

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt.**

1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości m, dla których $\Delta > 0$ i $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$: $m \in \left(-4 - 2\sqrt{6}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{9}\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$ (zamiast $\Delta > 0$), to za I etap rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania rozważa niepoprawną nierówność wymierną i rozwiązanie tej nierówności jest zbiorem rozłącznym ze zbiorem rozwiązań nierówności z I etapu, to zdający otrzymuje **0 punktów** za III etap.
3. Jeżeli w rozwiązaniu zdającego nie ma zapisu $m \neq 0$ albo $m \neq \frac{3}{2}$, albo zdający nie uwzględnia w rozwiązaniu warunku $m \neq 0$, albo $m \neq \frac{3}{2}$, to zdający może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Równanie $mx^2-(m+1)x-2m+3=0$ ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy $m\neq 0$ i wyróżnik Δ trójmianu kwadratowego $mx^2-(m+1)x-2m+3$ jest dodatni.

I etap
Rozwiązujemy warunek $\Delta>0$:

$$[-(m+1)]^2-4m\cdot(-2m+3)>0$$

$$9m^2-10m+1>0$$

$$(m-1)(9m-1)>0$$

$$m\in\left(-\infty,\frac{1}{9}\right)\cup(1,+\infty)$$

Zatem równanie $mx^2-(m+1)x-2m+3=0$ ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste, gdy $m\in(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{9}\right)\cup(1,+\infty)$.

II etap
Wyznaczymy wszystkie wartości m, dla których jest spełniony warunek: $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}<1$.
Przekształcamy nierówność $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}<1$ do postaci, która pozwoli na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a:

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}<1$$

$$\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}<1$$

Stąd, po zastosowaniu wzorów Viète'a, otrzymujemy:

$$\frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^2-2\cdot\frac{(-2m+3)}{m}}{\left(\frac{-2m+3}{m}\right)^2}<1$$

i dalej

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^2-2\cdot\frac{(-2m+3)}{m}<\left(\frac{-2m+3}{m}\right)^2 \quad \text{i} \quad m\neq 0 \quad \text{i} \quad m\neq\frac{3}{2}$$

$$(m+1)^2-2m(-2m+3)<(-2m+3)^2 \quad \text{i} \quad m\neq 0 \quad \text{i} \quad m\neq\frac{3}{2}$$

$$m^2+8m-8<0 \quad \text{i} \quad m\neq 0 \quad \text{i} \quad m\neq\frac{3}{2}$$

$$m\in\left(-4-2\sqrt{6},-4+2\sqrt{6}\right) \quad \text{i} \quad m\neq 0 \quad \text{i} \quad m\neq\frac{3}{2}$$

Zatem warunek $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}<1$ jest spełniony tylko dla $m\in\left(-4-2\sqrt{6},0\right)\cup\left(0,-4+2\sqrt{6}\right)$.

III etap

Wyznaczamy te wszystkie wartości m, które jednocześnie spełniają warunki: $m \neq 0$ i $m \in \left(-\infty, \frac{1}{9}\right) \cup (1, +\infty)$ i $m \in \left(-4-2\sqrt{6}, -4+2\sqrt{6}\right)$ i $m \neq \frac{3}{2}$:

$$m \in \left(-4-2\sqrt{6}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{9}\right)$$

Zadanie 13. (0–5)

Zasady oceniania

5 pkt – poprawna metoda rozwiązania oraz poprawny wynik: $|AB| = 2\sqrt{10}$, $|BC| = 3\sqrt{6}$, $|CD| = \sqrt{10}$, $|AD| = 2\sqrt{6}$.

4 pkt – obliczenie długości boków AB i AD: $|AB| = 2\sqrt{10}$ i $|AD| = 2\sqrt{6}$ oraz spełnienie jednego z poniższych kryteriów I–III:
I. obliczenie długości odcinka CE: $|CE| = 3$,
II. wyznaczenie skali podobieństwa trójkątów DEC i AEB: $\frac{1}{2}$,
III. obliczenie długości jednego z boków tego czworokąta i zapisanie wyrażenia arytmetycznego opisującego długości pozostałych boków w zależności od długości tego obliczonego boku.

3 pkt – obliczenie długości boków AB i AD: $|AB| = 2\sqrt{10}$ i $|AD| = 2\sqrt{6}$.

2 pkt – obliczenie wysokości AP trójkąta ASE: $|AP| = \sqrt{15}$
ALBO
– obliczenie długości odcinka CE: $|CE| = 3$,
ALBO
– wyznaczenie skali podobieństwa trójkątów DEC i AEB: $\frac{1}{2}$,
ALBO
– obliczenie długości odcinków DE, BE, AE: $|DE| = 2$, $|BE| = 6$ i $|AE| = 4$ oraz zapisanie układu równań prowadzącego do wyznaczenia długości boków a oraz d:
$a^2 + d^2 = 8^2$, $a^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos\beta$ oraz
$d^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos(180° - \beta)$.

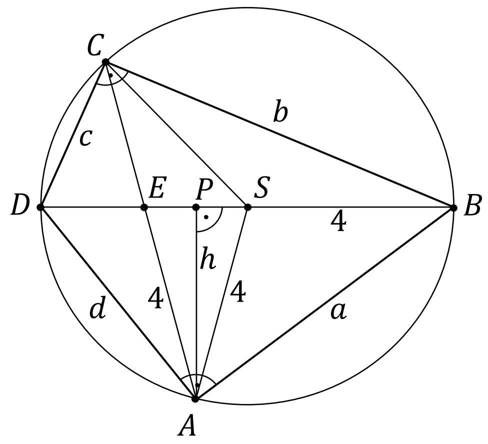
1 pkt – obliczenie długości odcinków DE, BE oraz AE: $|DE| = 2$, $|BE| = 6$ oraz $|AE| = 4$
ALBO
– zapisanie, że trójkąty DEC oraz AEB (albo trójkąty BEC oraz AED) są podobne,
ALBO
– zapisanie równości wynikającej z twierdzenia o odcinkach siecznych:
$|AE| \cdot |CE| = |BE| \cdot |DE|$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeśli zdający zapisze, że $|DE| = 1$ i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ trójkąty ABD i BCD są prostokątne, to ich wspólna przeciwprostokątna BD jest średnicą okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Zatem $|BD| = 8$. Stąd i z warunków $|BE| = 3 \cdot |DE|$ oraz $|BD| = 2 \cdot |AE|$ otrzymujemy $|DE| = 2$, $|BE| = 6$ i $|AE| = 4$.
Oznaczmy przez S środek okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Prowadzimy wysokość AP trójkąta ASE i przyjmijmy pozostałe oznaczenia jak na rysunku.



Ponieważ $|AE| = 4 = |AS|$, więc trójkąt ASE jest równoramienny. Zatem spodek P wysokości trójkąta ASE jest środkiem podstawy ES tego trójkąta. Stąd wynika, że $|EP| = |PS| = 1$.
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ASP otrzymujemy

$$|AS|^2 = |AP|^2 + |PS|^2$$

$$4^2 = h^2 + 1^2$$

$$h^2 = 15$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ABP i ADP otrzymujemy

$$|AB|^2 = |AP|^2 + |PB|^2 \quad \text{oraz} \quad |AD|^2 = |AP|^2 + |PD|^2$$

$$a^2 = h^2 + 5^2 \quad \text{oraz} \quad d^2 = h^2 + 3^2$$

$$a^2 = 15 + 25 \quad \text{oraz} \quad d^2 = 15 + 9$$

$$a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \quad \text{oraz} \quad d = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Kąty DCA i ABD są równe, gdyż są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku AD. Kąty DEC i BEA są równe, gdyż są to kąty wierzchołkowe. Zatem trójkąty DEC i BEA są podobne (cecha *kkk*). Wynika stąd, że

$$\frac{|CD|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|AE|}$$

$$\frac{c}{2} = \frac{2\sqrt{10}}{4}$$

$$c = \sqrt{10}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCD otrzymujemy

$$|BD|^2 = |CD|^2 + |BC|^2$$

$$8^2 = c^2 + b^2$$

$$64 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + b^2$$

$$b = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

Uwagi:

1. Długości boków CD i BC można obliczyć, wykorzystując twierdzenie o odcinkach siecznych. Wynika z niego, że $|AE| \cdot |CE| = |BE| \cdot |DE|$, więc $|CE| = 3$. Ponieważ $\cos\sphericalangle AEP = \frac{|EP|}{|AE|} = \frac{1}{4}$, to z twierdzenia cosinusów wynika, że $|CD|^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = 10$ oraz $|BC|^2 = 6^2 + 3^2 + 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = 54$.

2. Po wyznaczeniu odcinków $|DE| = 2$, $|BE| = 6$ i $|AE| = 4$ można wyznaczyć długości boków a oraz d, korzystając z twierdzenia cosinusów. Przyjmując $\beta = \sphericalangle AEB$, możemy zapisać układ trzech równań: $a^2 + d^2 = 8^2$, $a^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos\beta$ oraz $d^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos(180° - \beta)$. Wtedy $\cos\beta = \frac{1}{4}$ oraz $a = 2\sqrt{10}$ i $d = 2\sqrt{6}$.

Zadanie 14. (0–6)

Zasady oceniania

6 pkt – poprawne wyznaczenie wzoru funkcji $V(h)$ oraz jej dziedziny, oraz wyznaczenie wysokości graniastosłupa o największej objętości wraz z uzasadnieniem.

5 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji V: $h = \frac{\sqrt{3}}{3}d$.

4 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji V, np. $V'(h) = 2\left(d^2 - 3h^2\right)$.

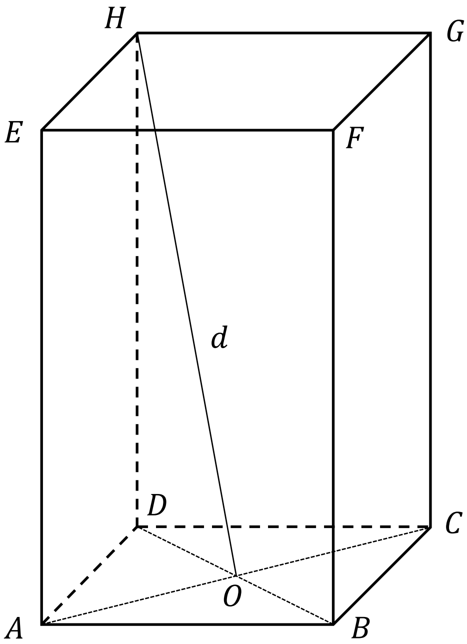
3 pkt – wyznaczenie dziedziny funkcji $V(h)$: $(0, d)$.

2 pkt – wyznaczenie objętości V graniastosłupa jako funkcji jego wysokości, np. $V(h) = 2(d^2 - h^2) \cdot h$.

1 pkt – wyznaczenie długości krawędzi podstawy w zależności od wysokości graniastosłupa: $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{d^2 - h^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie



Oznaczmy przez a długość krawędzi podstawy graniastosłupa, natomiast przez h – wysokość tego graniastosłupa.

a)

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ODH i otrzymujemy:

$$d^2 = h^2 + |OD|^2$$

$$|OD| = \sqrt{d^2 - h^2}$$

Ponieważ $|OD| = \frac{1}{2}|BD| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, więc $\frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{d^2 - h^2}$.

Stąd $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{d^2 - h^2}$ i $h \in (0, d)$.

Pole P_P podstawy graniastosłupa jest równe

$$P_P = \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{d^2 - h^2}\right)^2 = 2(d^2 - h^2)$$

Wyznaczamy objętość graniastosłupa jako funkcję zmiennej h:

$V(h) = 2(d^2 - h^2) \cdot h = 2(d^2 h - h^3)$ dla $0 < h < d$.

b)

Wyznaczamy pochodną funkcji V:

$$V'(h) = 2(d^2 - 3h^2)$$

Obliczamy miejsce zerowe pochodnej funkcji V:

$$V'(h) = 0$$

$$2(d^2 - 3h^2) = 0 \quad \text{i} \quad h \in (0, d)$$

$$h = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Ponieważ $V'(h) > 0$ dla $h \in \left(0, \frac{d}{\sqrt{3}}\right)$ oraz $V'(h) < 0$ dla $h \in (\frac{d}{\sqrt{3}}, d)$, więc funkcja V jest rosnąca w przedziale $(0, \frac{d}{\sqrt{3}}\rangle$ oraz malejąca w przedziale $\left\langle\frac{d}{\sqrt{3}}, d\right)$. Zatem funkcja V osiąga wartość największą dla $h = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Spośród rozważanych graniastosłupów największą objętość ma graniastosłup o wysokości $h = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Zadanie 15. (0–7)

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap polega na wyznaczeniu równania osi symetrii figury F, prostopadłej do prostej S_1S_2, a następnie obliczeniu współrzędnych punktów M i N. Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **4 punkty**.
Podział punktów za pierwszy etap rozwiązania:
Zdający otrzymuje **1 punkt**, gdy obliczy współrzędne środka S_2 okręgu: $S_2 = (2, 3)$.
Zdający otrzymuje **2 punkty**, gdy wyznaczy równanie osi symetrii przechodzącej przez środek S odcinka S_1S_2, która jest prostopadła do prostej S_1S_2: $y = x - 3$.
Zdający otrzymuje **3 punkty** za zapisanie równania z jedną niewiadomą prowadzącego do wyznaczenia współrzędnych punktów M i N, np. $(x-6)^2 + (x-2)^2 - 16 = 0$.
Zdający otrzymuje **4 punkty** za obliczenie współrzędnych punktów M i N: $M = (2, -1)$ oraz $N = (6, 3)$.

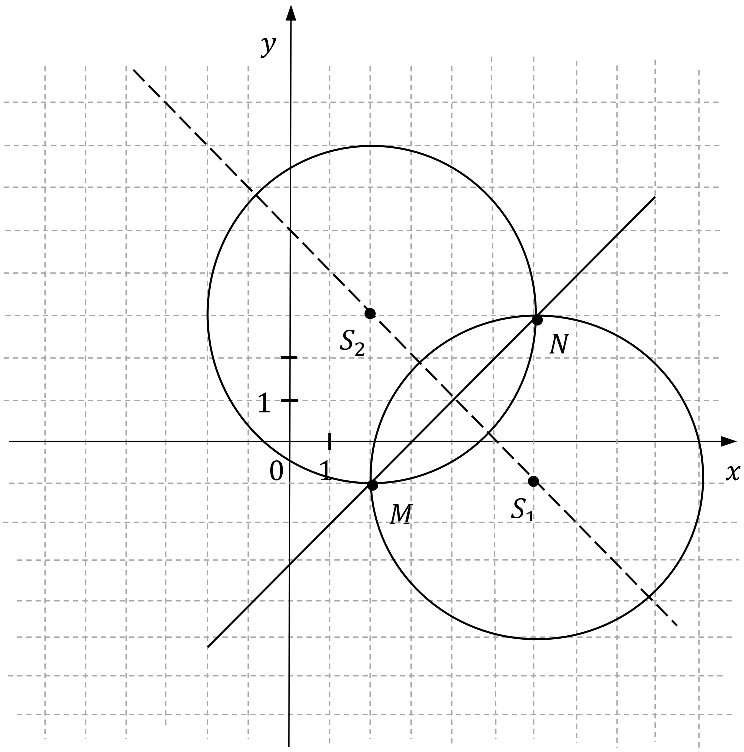
Drugi etap polega na zapisaniu równania prowadzącego do obliczenia współrzędnych punktu K i obliczeniu tych współrzędnych. Za ten etap rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.
Podział punktów za drugi etap rozwiązania:
Zdający otrzymuje **1 punkt** za uzależnienie współrzędnych punktu K od jednej niewiadomej, np. $K = (x, -x+5)$.
Zdający otrzymuje **2 punkty** za zapisanie równania z jedną niewiadomą prowadzącego do wyznaczenia współrzędnych punktu K, np. $\frac{1}{2} \cdot |-8x + 32| = 40$, $2 \cdot |2x - 8| = 40$.
Zdający otrzymuje **3 punkty** za obliczenie współrzędnych punktu K: $K_1 = (-6, 11)$, $K_2 = (14, -9)$.

Uwaga:
Jeżeli zdający prowadzi poprawne rozumowanie na każdym etapie rozwiązania zadania, rozwiązuje zadanie do końca i jedynym błędem, który jednak nie ułatwia rozwiązania zadania na żadnym etapie rozwiązania, jest błąd polegający na:

a) niepoprawnym wyznaczeniu współrzędnych środka okręgu o_1, to zdający otrzymuje co najwyżej **6 punktów** za całe rozwiązanie;
b) zastosowaniu niepoprawnej metody obliczania współrzędnych punktów wspólnych okręgu o_1 i osi symetrii figury F prostopadłej do prostej S_1S_2, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (za S_2, oś symetrii i K);
c) zastosowaniu niepoprawnej metody wyznaczenia:
   - środka okręgu o_2
   - współczynnika kierunkowego prostej prostopadłej do prostej S_1S_2,

   to zdający może otrzymać co najwyżej **5 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania



Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów.

I etap

Wyznaczamy współrzędne środka S_1 okręgu o_1: $S_1 = (6, -1)$. Ponieważ $S_1 = (6, -1)$ i $\overrightarrow{S_1S_2} = [-4, 4]$, więc współrzędne środka S_2 są równe: $S_2 = (6 - 4, -1 + 4) = (2, 3)$.
Zauważmy, że figura F ma dwie osie symetrii. Jedną z nich jest prosta S_1S_2, do której należą środki okręgów o_1 i o_2 , drugą – prosta prostopadła do prostej S_1S_2 przechodząca przez środek S odcinka S_1S_2 .
Oś symetrii, do której należą środki obu okręgów ma zatem równanie $x + y - 5 = 0$, czyli $y = -x + 5$.
Wyznaczamy równanie osi symetrii figury F, prostopadłej do prostej S_1S_2 .
Obliczamy współrzędne środka S odcinka S_1S_2: $S = (4, 1)$ i wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkt S: $y = x - 3$. Współczynnik kierunkowy tej osi symetrii jest dodatni, więc punkty M i N leżą na tej prostej.
Ponieważ punkty M i N są punktami przecięcia figury F i osi symetrii o równaniu $y = x - 3$, więc są punktami przecięcia okręgu o_1 i prostej $y = x - 3$.
Współrzędne tych punktów obliczamy, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} (x-6)^2 + (y+1)^2 = 16 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

Po podstawieniu $y = x - 3$ do pierwszego równania otrzymujemy równanie

$$(x-6)^2 + (x-2)^2 - 16 = 0$$

a po przekształceniach – równanie kwadratowe $2x^2 - 16x + 24 = 0$.

Stąd $x_1 = 2, x_2 = 6$. Zatem współrzędne punktów M i N są równe: $M = (2, -1)$ oraz $N = (6, 3)$.

II etap
Punkt K leży na osi symetrii przechodzącej przez środki obu okręgów, więc jego współrzędne można zapisać w postaci: $K = (x, -x + 5)$.

<u>*Sposób I*</u>
Wiemy, że pole trójkąta MNK jest równe 40, więc

$$\frac{1}{2} \cdot |(6 - 2)(-x + 5 + 1) - (3 + 1)(x - 2)| = 40$$

Stąd po przekształceniach otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{2} \cdot |-8x + 32| = 40$$

czyli

$$-4x + 16 = 40 \quad \text{lub} \quad -4x + 16 = -40$$

$$x = -6 \quad \text{lub} \quad x = 14$$

Zatem są dwa takie punkty K: $K_1 = (-6, 11)$ oraz $K_2 = (14, -9)$.

<u>*Sposób II*</u>
Obliczamy długość podstawy MN trójkąta MNK: $|MN| = \sqrt{(6-2)^2 + (3+1)^2} = 4\sqrt{2}$.
Wysokość h trójkąta MNK jest równa odległości punktu K od prostej MN o równaniu $x - y - 3 = 0$. Zatem

$$h = \frac{|1 \cdot x - 1 \cdot (-x + 5) - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2x - 8|}{\sqrt{2}}$$

Wiemy, że pole trójkąta MNK jest równe 40, więc

$$\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{|2x - 8|}{\sqrt{2}} = 40$$

Stąd otrzymujemy równanie

$$2 \cdot |2x - 8| = 40$$

czyli

$$2x - 8 = -20 \quad \text{lub} \quad 2x - 8 = 20$$

$$x = -6 \quad \text{lub} \quad x = 14$$

Zatem $K = (-6, 11)$ lub $K = (14, -9)$.