CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA



**WYPEŁNIA ZDAJĄCY**

KOD | PESEL

*Miejsce na naklejkę.*
*Sprawdź, czy kod na naklejce to* **E-100**.
*Jeżeli tak – przyklej naklejkę.*
*Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.*

# EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

## POZIOM ROZSZERZONY

DATA: **2 czerwca 2022 r.**
GODZINA ROZPOCZĘCIA: **14:00**
CZAS PRACY: **180 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

**WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY**

Uprawnienia zdającego do:
- ☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę
- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią.

EMAP-R0-**100**-2206

**Instrukcja dla zdającego**

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 26 stron (zadania 1–15). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–4) zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.
6. W zadaniu 5. wpisz odpowiednie cyfry w kratki pod treścią zadania.
7. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (6–15) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
8. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
9. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
10. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
11. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

*W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.*

**Zadanie 1. (0–1)**

Wiadomo, że $\log_5 2 = a$ i $\log_5 3 = b$. Wtedy liczba $\log_{18} 40$ jest równa

**A.** $\frac{3a+1}{a+b}$ **B.** $\frac{2a+1}{a+b}$ **C.** $\frac{2a+1}{a+2b}$ **D.** $\frac{3a+1}{2b+a}$

**Zadanie 2. (0–1)**

Granica $\lim\limits_{x \to -3} \frac{0{,}5x^2+3{,}5x+6}{-x^2+2x+15}$ jest równa

**A.** $\left(-\frac{1}{8}\right)$ **B.** $\frac{1}{16}$ **C.** $\left(-\frac{1}{16}\right)$ **D.** $\frac{7}{4}$

**Zadanie 3. (0–1)**

Sumą wektorów $\vec{a} = \left[2 + 2m,\ \frac{2}{3}n + 1\right]$ oraz $\vec{b} = [n + 1, m + 2]$ jest wektor $\vec{c} = [0, 0]$.
Wynika stąd, że

**A.** $m = 1$ i $n = 3$.
**B.** $m = -9$ i $n = -21$.
**C.** $m = 3$ i $n = -9$.
**D.** $m = -1$ i $n = 0$.

**Zadanie 4. (0–1)**

Pole trójkąta ostrokątnego o bokach $5$ i $8$ jest równe $12$. Długość trzeciego boku tego trójkąta jest równa

**A.** $5$ **B.** $8$ **C.** $\sqrt{41}$ **D.** $\sqrt{143}$

## BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

**Zadanie 5. (0–2)**

Wśród $390$ pracowników pewnej firmy jest $150$ kobiet i $240$ mężczyzn. Wśród nich w wieku przedemerytalnym jest $21$ kobiet i $43$ mężczyzn. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrany pracownik tej firmy jest w wieku przedemerytalnym – pod warunkiem że jest mężczyzną.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

| | | |
|---|---|---|
| | | |

## BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

**Zadanie 6. (0–3)**

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x$ i dla każdej liczby rzeczywistej $y$ takich, że $x \neq y$, spełniona jest nierówność

$$x^4 + y^4 > xy(x^2 + y^2)$$

**Zadanie 7. (0–3)**

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie dwie cyfry nieparzyste.

**Zadanie 8. (0–3)**

Rozwiąż nierówność

$$\frac{3x+1}{2x+1} \leq \frac{3x+4}{2x+3}$$

**Zadanie 9. (0–3)**

W trapezie $ABCD$ o podstawach $AB$ i $CD$ przez punkt $O$ przecięcia się przekątnych poprowadzono dwie proste równoległe do boków $BC$ i $AD$. Prosta równoległa do boku $BC$ przecina bok $AB$ w punkcie $B'$, a prosta równoległa do boku $AD$ przecina bok $AB$ w punkcie $A'$. Wykaż, że $|AA'| = |BB'|$.

### Zadanie 10. (0–4)

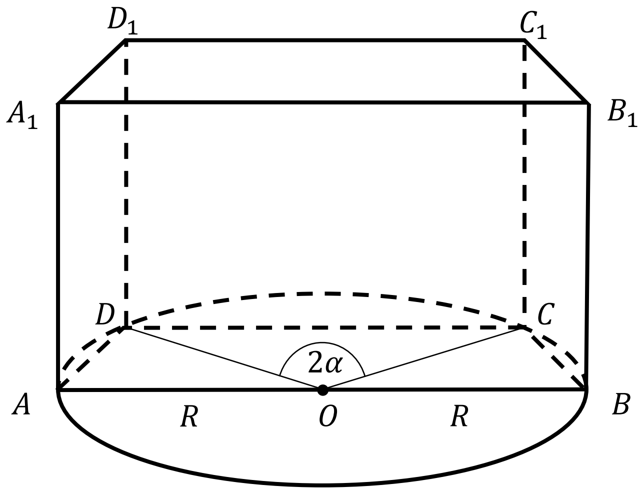
Dany jest nieskończony ciąg geometryczny $(a_n)$, określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, którego iloraz $q$ jest równy pierwszemu wyrazowi i spełnia warunek $|q| < 1$.
Stosunek sumy $S_N$ wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych do sumy $S_P$ wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równy różnicy tych sum,
tj. $\frac{S_N}{S_P} = S_N - S_P$ . Oblicz $q$.

**Zadanie 11. (0–4)**

Rozwiąż równanie $\cos(3x) + \sqrt{3}\sin(3x) + 1 = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

**Zadanie 12. (0–5)**

Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jest trapez równoramienny $ABCD$ wpisany w okrąg o środku $O$ i promieniu $R$. Dłuższa podstawa $AB$ trapezu jest średnicą tego okręgu, a krótsza – cięciwą odpowiadającą kątowi środkowemu o mierze $2\alpha$ (zobacz rysunek). Przekątna ściany bocznej zawierającej ramię trapezu jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze $\alpha$. Wyznacz objętość tego graniastosłupa jako funkcję promienia $R$ i miary kąta $\alpha$.



## Zadanie 13. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru $m$, dla których równanie

$$(x-4)[x^2+(m-3)x+m^2-m-6]=0$$

ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste $x_1$, $x_2$ oraz $x_3$, spełniające warunek

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5m - 51$$

## Zadanie 14. (0–6)

Dane są okrąg $o_1$ o równaniu $(x-6)^2+(y-4)^2=98$ oraz okrąg $o_2$ o promieniu $2\sqrt{5}$. Środki okręgów $o_1$ i $o_2$ leżą po różnych stronach prostej $k$ o równaniu $y=-3x-6$, a punkty wspólne obu okręgów leżą na prostej $k$. Wyznacz równanie okręgu $o_2$.

**Zadanie 15. (0–7)**

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty równoramienne ostrokątne $ABC$ ($|AC| = |BC|$), na których opisano okrąg o promieniu $R = 1$. Niech $x$ oznacza odległość środka okręgu od podstawy $AB$ trójkąta.

a) Wykaż, że pole $P$ każdego z tych trójkątów, jako funkcja długości $x$, wyraża się wzorem $P(x) = (x + 1) \cdot \sqrt{1 - x^2}$.

b) Wyznacz dziedzinę funkcji $P$.

c) Oblicz długość odcinka $x$ tego z rozpatrywanych trójkątów, który ma największe pole. Oblicz to największe pole.

# BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)