CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	EMAP-R0-100-2206, EMAP-R0-200-2206, EMAP-R0-300-2206, EMAP-R0-400-2206, EMAP-R0-600-2206, EMAP-R0-700-2206, EMAP-R0-Q00-2206
Termin egzaminu:	2 czerwca 2022 r.
Data publikacji dokumentu:	28 czerwca 2022 r.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R1.2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R11.1) oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

[1] Załącznik nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 20 marca 2020 r. w sprawie szczególnych rozwiązań w okresie czasowego ograniczenia funkcjonowania jednostek systemu oświaty w związku z zapobieganiem, przeciwdziałaniem i zwalczaniem COVID-19 (Dz.U. poz. 493, z późn. zm.).

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R8.4) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometryczne działania na wektorach.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R7.4) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

ZADANIE OTWARTE (KODOWANE)

Zadanie 5. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R10.2) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

Zasady oceniania

2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

1	7	9

ZADANIA OTWARTE (NIEKODOWANE)

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 6. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: R2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$; R2.3) rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p

gdy przekształci nierówność do postaci $(x-y)(x^3-y^3)>0$.

Zdający otrzymuje .... 2 p
gdy:
- przekształci nierówność do postaci $(x-y)^2(x^2+xy+y^2)>0$

ALBO
- przekształci nierówność do postaci $(x-y)(x^3-y^3)>0$ oraz rozpatrzy i uzasadni prawdziwość tej nierówności dla jednego z przypadków: $x<y$ albo $x>y$.

Zdający otrzymuje .... 3 p
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy nierówność równoważnie w następujący sposób:

$$x^4+y^4>xy(x^2+y^2)$$

$$x^4+y^4>x^3y+xy^3$$

$$x^4-x^3y+y^4-xy^3>0$$

$$x^3(x-y)+y^3(y-x)>0$$

$$x^3(x-y)-y^3(x-y)>0$$

$$(x-y)(x^3-y^3)>0$$

$$(x-y)(x-y)(x^2+xy+y^2)>0$$

$$(x-y)^2(x^2+xy+y^2)>0$$

Z założenia $x\neq y$, więc wyrażenie $(x-y)^2$ jest dodatnie jako kwadrat liczby różnej od zera. Wyrażenie x^2+xy+y^2 jest dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej y takiej, że $x\neq y$. Zatem lewa strona nierówności $(x-y)^2(x^2+xy+y^2)>0$ jest iloczynem czynników dodatnich, więc iloczyn ten jest dodatni. To kończy dowód.

Uwaga:
Prawdziwość nierówności $x^2+xy+y^2>0$ dla każdych liczb rzeczywistych x oraz y takich, że $x\neq y$ możemy wykazać następująco.
Gdy x i y są jednocześnie liczbami różnymi od zera, to wobec tożsamości $x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy=(x+y)^2+(-xy)$ liczbę x^2+xy+y^2 można przedstawić jako sumę liczby nieujemnej i liczby dodatniej. Zatem $x^2+xy+y^2>0$.
Gdy dokładnie jedna z liczb x, y jest zerem (przyjmijmy, że x), to wtedy $x^2+xy+y^2=y^2$ więc liczba x^2+xy+y^2 jest dodatnia jako kwadrat liczby różnej od zera.
Prawdziwość nierówności $x^2+xy+y^2>0$ dla każdych liczb rzeczywistych x oraz y takich, że $x\neq y$ możemy również wykazać poprzez badanie funkcji kwadratowej $f(x)=x^2+xy+y^2$ zmiennej rzeczywistej x z parametrem y.

Zadanie 7. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: R10.1) wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy spełni jeden z poniższych czterech warunków:

1) zapisze liczbę wszystkich rozpatrywanych liczb pięciocyfrowych, w których pierwsza cyfra jest nieparzysta: $5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5^3$,
2) zapisze liczbę wszystkich rozpatrywanych liczb pięciocyfrowych, w których pierwsza cyfra jest parzysta: $4 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^2$,
3) zapisze liczbę wszystkich ciągów pięciowyrazowych, których wyrazami są elementy zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ oraz dokładnie dwa wyrazy są cyframi nieparzystymi: $\binom{5}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^3$,
4) zapisze liczbę wszystkich ciągów pięciowyrazowych, których wyrazami są elementy zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i pierwszym wyrazem jest cyfra 0: $\binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^2$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- spełni warunki 1) oraz 2) określone w zasadach oceniania za 1 pkt

ALBO

- spełni warunki 3) oraz 4) określone w zasadach oceniania za 1 pkt.

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy zastosuje poprawną metodę i otrzyma poprawny wynik: 27500.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>Sposób 1.</u>
Rozpatrujemy dwa przypadki.

Przypadek 1. (pierwsza cyfra jest nieparzysta).
Jeśli pierwszą cyfrą jest cyfra nieparzysta, którą możemy wybrać na 5 sposobów, to z czterech pozostałych miejsc wybieramy jedno, na które wstawiamy cyfrę nieparzystą. Możemy to zrobić na $4 \cdot 5$ sposobów. Na pozostałych trzech miejscach umieszczamy cyfry parzyste na 5^3 sposobów. Liczba wszystkich utworzonych w ten sposób liczb pięciocyfrowych jest równa $5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5^3 = 4 \cdot 5^5 = 12500$.

Przypadek 2. (pierwsza cyfra jest parzysta).
Jeśli pierwszą cyfrą jest cyfra parzysta, którą możemy wybrać na 4 sposoby, to z czterech pozostałych miejsc wybieramy dwa, na które wstawiamy cyfry nieparzyste. Możemy to zrobić na $\binom{4}{2} \cdot 5^2$ sposobów. Na pozostałych dwóch miejscach umieszczamy cyfry parzyste na 5^2 sposobów. Liczba wszystkich utworzonych w ten sposób liczb pięciocyfrowych jest równa $4 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 24 \cdot 5^4 = 15000$.

Zatem wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych spełniających podane w zadaniu warunki jest $12500 + 15000 = 27500$.

<u>Sposób 2.</u>
Obliczamy liczbę wszystkich takich ciągów pięciowyrazowych, których wyrazami są elementy zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ oraz dokładnie dwa wyrazy to cyfry nieparzyste, a trzy pozostałe to cyfry parzyste. Wszystkich takich ciągów jest $\binom{5}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^3 = \binom{5}{2} \cdot 5^5 = 31250$. Wśród nich są ciągi, w których pierwszym wyrazem jest 0 – takich ciągów jest $\binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^2 = \binom{4}{2} \cdot 5^4 = 3750$. Pozostałe ciągi reprezentują rozpatrywane liczby pięciocyfrowe, w których zapisie występują dokładnie dwie cyfry nieparzyste..
Zatem wszystkich naturalnych liczb pięciocyfrowych spełniających podane w zadaniu warunki jest $31250 - 3750 = 27500$.

Zadanie 8. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R3.7) rozwiązuje proste nierówności wymierne […].

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- przekształci nierówność $\frac{3x+1}{2x+1} \leq \frac{3x+4}{2x+3}$ do postaci $\frac{(3x+1)\cdot(2x+3)-(3x+4)(2x+1)}{(2x+1)\cdot(2x+3)} \leq 0$

ALBO

- przekształci nierówność $\frac{3x+1}{2x+1} \leq \frac{3x+4}{2x+3}$, mnożąc obie strony tej nierówności przez iloczyn $(2x+1)^2(2x+3)^2$, do postaci

  $(3x+1)(2x+1)(2x+3)^2 - (3x+4)(2x+3)(2x+1)^2 \leq 0$

  gdzie $x \neq -\frac{3}{2}$ i $x \neq -\frac{1}{2}$,

ALBO

- przyjmie, że $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ i przekształci nierówność $\frac{3x+1}{2x+1} \leq \frac{3x+4}{2x+3}$ {mnożąc obie strony nierówności przez iloczyn $(2x+1)(2x+3)$ } do postaci

$$(3x+1)(2x+3) \leq (3x+4)(2x+1)$$

ALBO

- przyjmie, że $x \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ i przekształci nierówność $\frac{2x-1}{1-x} \leq \frac{2+2x}{5x}$ {mnożąc obie strony nierówności przez iloczyn $(2x+1)(2x+3)$ } do postaci

$$(3x+1)(2x+3) \geq (3x+4)(2x+1)$$

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- przekształci nierówność $\frac{3x+1}{2x+1} \leq \frac{3x+4}{2x+3}$ do postaci iloczynowej, np. $(2x+1)(2x+3) \geq 0$, gdzie $x \neq -\frac{1}{2}$ i $x \neq -\frac{3}{2}$

ALBO

- rozwiąże nierówność $(3x+1)(2x+3) \leq (3x+4)(2x+1)$ w zbiorze $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ i zapisze, że każda liczba z tego zbioru spełnia nierówność (lub zapisze $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$),

ALBO

- rozwiąże nierówność $(3x+1)(2x+3) \leq (3x+4)(2x+1)$ w przedziale $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ i zapisze, że w tym przedziale nierówność nie ma rozwiązań.

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy zastosuje poprawną metodę rozwiązania nierówności i otrzyma poprawny wynik:
$x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Uwagi:

1. Jeśli zdający mnoży obie strony nierówności przez iloczyn mianowników bez rozpatrzenia znaków tego iloczynu, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeśli zdający nie wyłączy ze zbioru rozwiązań nierówności liczb $x = -\frac{3}{2}$ i $x = -\frac{1}{2}$, to otrzymuje za całe rozwiązanie co najwyżej **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>Sposób 1.</u>

Zakładamy, że $x \neq -\frac{1}{2}$ i $x \neq -\frac{3}{2}$. Przekształcamy równoważnie podaną nierówność:

$$\frac{3x+1}{2x+1} - \frac{3x+4}{2x+3} \leq 0$$

$$\frac{(3x+1)(2x+3)-(3x+4)(2x+1)}{(2x+1)(2x+3)} \le 0$$

$$\frac{-1}{(2x+1)(2x+3)} \le 0$$

Stąd dostajemy

$$4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right) \ge 0 \quad \text{i} \quad x \neq -\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad x \neq -\frac{3}{2}$$

Zatem $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Sposób 2.

Zakładamy, że $x \neq -\frac{1}{2}$ i $x \neq -\frac{3}{2}$. Przekształcamy równoważnie podaną nierówność:

$$\frac{3x+1}{2x+1} - \frac{3x+4}{2x+3} \le 0 \quad /\cdot (2x+1)^2(2x+3)^2$$

$$(3x+1)(2x+1)(2x+3)^2 - (3x+4)(2x+3)(2x+1)^2 \le 0$$

$$(2x+1)(2x+3)[(3x+1)(2x+3)-(3x+4)(2x+1)] \le 0$$

$$-(2x+1)(2x+3) \le 0 \quad \text{i} \quad x \neq -\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad x \neq -\frac{3}{2}$$

Zatem $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Sposób 3.

1. Rozwiązujemy nierówność $\frac{3x+1}{2x+1} \le \frac{3x+4}{2x+3}$ w zbiorze $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
Przekształcamy równoważnie podaną nierówność:

$$\frac{3x+1}{2x+1} - \frac{3x+4}{2x+3} \le 0 \quad /\cdot (2x+1)(2x+3)$$

$$(3x+1)(2x+3)-(3x+4)(2x+1) \le 0$$

$$-1 \le 0$$

Zatem dla każdego $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ nierówność $\frac{3x+1}{2x+1} \le \frac{3x+4}{2x+3}$ jest prawdziwa.

2. Rozwiązujemy nierówność $\frac{2x-1}{1-x} \le \frac{2+2x}{5x}$ w zbiorze $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
Przekształcamy równoważnie podaną nierówność:

$$\frac{3x+1}{2x+1} - \frac{3x+4}{2x+3} \le 0 \quad /\cdot (2x+1)(2x+3)$$

$$(3x+1)(2x+3)-(3x+4)(2x+1) \ge 0$$

$$-1 \ge 0$$

Nierówność $-1 \geq 0$ jest sprzeczna, więc w przedziale $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ nierówność $\frac{3x+1}{2x+1} \leq \frac{3x+4}{2x+3}$ nie ma żadnych rozwiązań.

Ostatecznie zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $\frac{3x+1}{2x+1} \leq \frac{3x+4}{2x+3}$ jest $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Zadanie 9. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: R7.3) rozpoznaje figury podobne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zauważy, że trójkąty ABD i $A'BO$ są podobne i zapisze $\frac{|AB|}{|A'B|} = \frac{H}{h}$

ALBO

- zauważy, że trójkąty ABC i $AB'O$ są podobne i zapisze $\frac{|AB|}{|AB'|} = \frac{H}{h}$,

ALBO

- zapisze, że $P_{\Delta AOD} = P_{\Delta BOC}$,

ALBO

- zapisze pole równoległoboku $AA'FD$ w zależności od a, h_1, h_2 oraz $P_{\Delta AOD}$:

$$P_{AA'FD} = \frac{1}{2}a \cdot h_1 + \frac{1}{2}a \cdot h_2 + P_{\Delta AOD}$$

ALBO

- zapisze pole równoległoboku $BB'EC$ w zależności od b, h_1, h_2 oraz $P_{\Delta BOC}$:

$$P_{BB'EC} = \frac{1}{2}b \cdot h_1 + \frac{1}{2}b \cdot h_2 + P_{\Delta BOC}$$

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- zapisze proporcje wynikające z podobieństwa trójkątów ABD i $A'BO$ oraz z podobieństwa trójkątów ABC i $AB'O$: $\frac{|AB|}{|A'B|} = \frac{H}{h}$ i $\frac{|AB|}{|AB'|} = \frac{H}{h}$

ALBO

- zapisze pole równoległoboku $AA'FD$ w zależności od a, h_1, h_2 oraz $P_{\Delta AOD}$:

$$P_{AA'FD} = \frac{1}{2}a \cdot h_1 + \frac{1}{2}a \cdot h_2 + P_{\Delta AOD}$$

oraz zapisze, że $P_{\Delta AOD} = P_{\Delta BOC}$,

ALBO

- zapisze pole równoległoboku $BB'EC$ w zależności od b, h_1, h_2 oraz $P_{\Delta BOC}$:

$$P_{BB'EC} = \frac{1}{2}b \cdot h_1 + \frac{1}{2}b \cdot h_2 + P_{\Delta BOC}$$

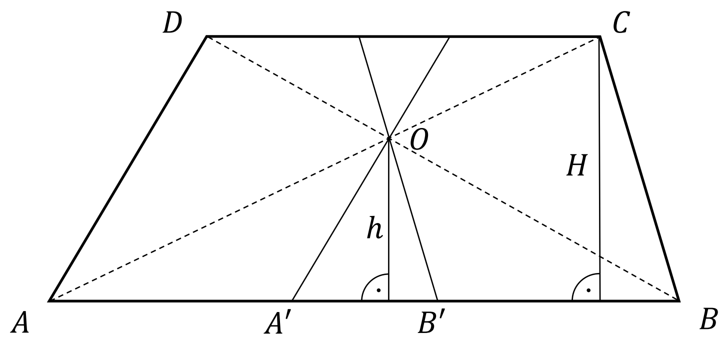
oraz zapisze, że $P_{\Delta AOD} = P_{\Delta BOC}$.

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1. (trójkąty podobne)

Oznaczmy przez H wysokość trapezu $ABCD$, a przez h – wysokość trójkąta ABO opuszczoną z punktu O na bok AB.



Ponieważ $AD \parallel A'O$, więc $|\measuredangle DAB| = |\measuredangle OA'B|$ oraz $|\measuredangle ADB| = |\measuredangle A'OB|$. Zatem trójkąty ABD i $A'BO$ są podobne (cecha *kkk* podobieństwa trójkątów). Stąd

$$\frac{|AB|}{|A'B|} = \frac{H}{h}$$

Podobnie, ponieważ $BC \parallel B'O$, więc $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle AB'O|$ oraz $|\measuredangle BCA| = |\measuredangle B'OA|$. Zatem trójkąty ABC i $AB'O$ są podobne (cecha *kkk* podobieństwa trójkątów). Stąd

$$\frac{|AB|}{|AB'|} = \frac{H}{h}$$

Z powyższego otrzymujemy $\frac{|AB|}{|A'B|} = \frac{|AB|}{|AB'|}$, czyli $|A'B| = |AB'|$.

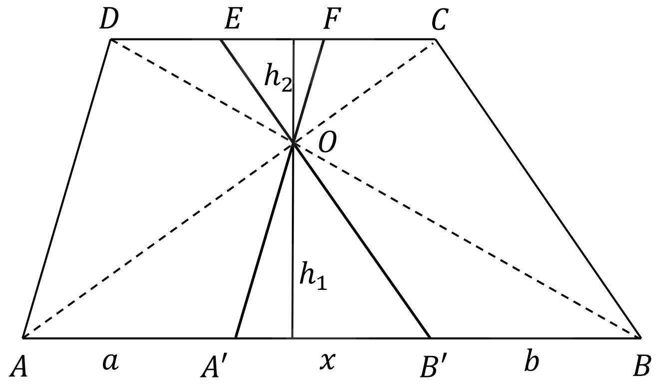
Ponieważ $|A'B| = |AB| - |AA'|$ oraz $|AB'| = |AB| - |BB'|$, więc

$$|AB| - |AA'| = |AB| - |BB'|$$

czyli $|AA'| = |BB'|$. To należało pokazać.

Sposób 2. (porównanie pól)
Wprowadzamy następujące oznaczenia:
H – wysokość trapezu $ABCD$,
h_1 – wysokość trójkąta ABO opuszczona z punktu O na bok AB,
h_2 – wysokość trójkąta CDO opuszczona z punktu O na bok CD.
a – długość odcinka AA',
b – długość odcinka BB',

x – długość odcinka $A'B'$.
E – punkt przecięcia prostej $B'O$ z odcinkiem CD,
F – punkt przecięcia prostej $A'O$ z odcinkiem CD.



Z własności trapezu $H = h_1 + h_2$ oraz $P_{\Delta AOD} = P_{\Delta BOC} = P$.
Ponieważ $P_{AA'FD} = P_{\Delta AA'O} + P_{\Delta AOD} + P_{\Delta DOF}$, więc

$$P_{AA'FD} = \frac{1}{2}a \cdot h_1 + P_{\Delta AOD} + \frac{1}{2}a \cdot h_2$$

a uwzględniając, że $P_{AA'FD} = a \cdot H = a \cdot (h_1 + h_2)$, otrzymujemy

$$a \cdot (h_1 + h_2) = \frac{1}{2}a \cdot h_1 + P_{\Delta AOD} + \frac{1}{2}a \cdot h_2$$

$$a \cdot (h_1 + h_2) = \frac{1}{2}a \cdot h_1 + P + \frac{1}{2}a \cdot h_2$$

$$\frac{1}{2}a \cdot (h_1 + h_2) = P$$

Podobnie, ponieważ $P_{BB'EC} = P_{\Delta BB'O} + P_{\Delta BOC} + P_{\Delta COE}$, więc

$$P_{BB'EC} = \frac{1}{2}b \cdot h_1 + P_{\Delta BOC} + \frac{1}{2}b \cdot h_2$$

a uwzględniając, że $P_{BB'EC} = b \cdot H = b \cdot (h_1 + h_2)$, otrzymujemy

$$b \cdot (h_1 + h_2) = \frac{1}{2}b \cdot h_1 + P_{\Delta BOC} + \frac{1}{2}b \cdot h_2$$

$$b \cdot (h_1 + h_2) = \frac{1}{2}b \cdot h_1 + P + \frac{1}{2}b \cdot h_2$$

$$\frac{1}{2}b \cdot (h_1 + h_2) = P$$

Z równań $\frac{1}{2}a \cdot (h_1 + h_2) = P$ oraz $\frac{1}{2}b \cdot (h_1 + h_2) = P$ otrzymujemy $a = b$.
To należało pokazać.

Zadanie 10. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: R5.2) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje ... 1 p.
gdy zastosuje wzór na sumę szeregu geometrycznego i zapisze sumy S_N i S_P w zależności od q i – odpowiednio – a_1 oraz a_2 (lub tylko w zależności od q):
$S_N = \frac{a_1}{1-q^2}$, $S_P = \frac{a_2}{1-q^2}$.

Zdający otrzymuje ... 2 p.
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą q, np. $\frac{\frac{q}{1-q^2}}{\frac{q^2}{1-q^2}} = \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^2}{1-q^2}$.

Zdający otrzymuje ... 3 p.
gdy zapisze równanie wielomianowe z jedną niewiadomą q, np. $q^2 - q - 1 = 0$.

Zdający otrzymuje ... 4 p.
gdy rozwiąże równanie z niewiadomą q: $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ lub $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ oraz odrzuci wartość ilorazu, która nie spełnia warunków zadania, podając poprawny wynik: $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że każdy z ciągów $(a_1, a_3, a_5, \ldots)$, $(a_2, a_4, a_6, \ldots)$ jest geometryczny, a iloraz każdego z nich jest równy q^2. Ponieważ $|q| < 1$, więc $|q^2| < 1$. Korzystamy ze wzoru na sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego zbieżnego i otrzymujemy

$$S_N = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots = \frac{a_1}{1-q^2} = \frac{q}{1-q^2}$$

oraz

$$S_P = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots = \frac{a_2}{1-q^2} = \frac{a_1 q}{1-q^2} = \frac{q^2}{1-q^2}$$

Zatem S_P jest różna od zera, gdy $0 < |q| < 1$.
Z warunku $\frac{S_N}{S_P} = S_N - S_P$ otrzymujemy kolejno

$$\frac{\frac{q}{1-q^2}}{\frac{q^2}{1-q^2}} = \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^2}{1-q^2}$$

$$\frac{q}{1-q^2} \cdot \frac{1-q^2}{q^2} = \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^2}{1-q^2}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{q-q^2}{1-q^2}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{q(1-q)}{(1-q)(1+q)}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{q}{1+q}$$

$$1+q = q^2$$

$$q^2 - q - 1 = 0$$

$$q = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ lub } q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Spośród otrzymanych wartości q tylko pierwsza spełnia warunki zadania, więc ostatecznie $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Zadanie 11. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R6.6) rozwiązuje równania trygonometryczne […].

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zapisze równanie w postaci $\frac{1}{2}\cos(3x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3x) + \frac{1}{2} = 0$

ALBO

- zapisze alternatywę równań $\sin(3x) = 0$ lub $\sin(3x) + \sqrt{3}\cos(3x) = 0$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- zapisze równanie $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 3x\right) = -\frac{1}{2}$ (lub $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$)

ALBO

- rozwiąże równanie $\sin(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych, lecz nie odrzuci rozwiązań obcych równania $\cos(3x) + \sqrt{3}\sin(3x) + 1 = 0$: $x = \frac{1}{3}\pi \cdot k$, gdzie k jest liczbą całkowitą,

ALBO

- rozwiąże równanie $\sin(3x) + \sqrt{3}\cos(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych, lecz nie odrzuci rozwiązań obcych równania $\cos(3x) + \sqrt{3}\sin(3x) + 1 = 0$: $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{1}{3}\pi \cdot k$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy:

- zapisze poprawnie obie serie rozwiązań równania $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 3x\right) = -\frac{1}{2}$ (lub $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$) w $\mathbb{R}$, np.: $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k$ lub $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k$ gdzie k jest liczbą całkowitą (bez wyznaczenia rozwiązań z danego przedziału)

ALBO

- zapisze poprawnie jedno z rozwiązań równania $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 3x\right) = -\frac{1}{2}$ (lub $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$) w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$, np.: $x = \frac{\pi}{3}$ (lub $x = \pi$, lub $x = \frac{5}{9}\pi$),

ALBO

- rozwiąże równanie $\sin(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych i odrzuci rozwiązania obce: $x = \frac{1}{3}\pi \cdot k$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieparzystą,

ALBO

- rozwiąże równanie $\sin(3x) + \sqrt{3}\cos(3x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych i odrzuci rozwiązania obce: $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{1}{3}\pi \cdot k$, gdzie k jest liczbą całkowitą parzystą.

Zdający otrzymuje .... 4 p.
gdy:

- gdy zastosuje poprawną metodę rozwiązania równania
$$\cos(3x) + \sqrt{3}\sin(3x) + 1 = 0$$
i poda prawidłowe rozwiązania w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{3}$ lub $x = \pi$ lub $x = \frac{5}{9}\pi$.

Uwagi:

1. Jeśli jedynym błędem zdającego jest błąd przy przepisywaniu wzoru trygonometrycznego, np. zapisuje cosinus sumy argumentów zamiast cosinusa ich różnicy i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to zdający może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający, rozwiązując jedno z otrzymanych równań, stosuje metodę analizy starożytnych, np. podnosi obie strony równania $\cos(3x) + \sqrt{3}\sin(3x) = -1$ do kwadratu i nie odrzuci rozwiązań obcych, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.
Dzielimy obie strony równania $\cos(3x) + \sqrt{3}\sin(3x) + 1 = 0$ przez 2 i otrzymujemy kolejno

$$\cos(3x) + \sqrt{3}\sin(3x) + 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}\cos(3x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3x) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{6}\cos(3x) + \cos\frac{\pi}{6}\sin(3x) = -\frac{1}{2}$$

Stąd, po zastosowaniu wzoru na sinus sumy argumentów, otrzymujemy równanie elementarne

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + 3x\right) = -\frac{1}{2}$$

Zatem

$$\frac{\pi}{6} + 3x = \frac{7}{6}\pi + 2\pi k \quad \text{lub} \quad \frac{\pi}{6} + 3x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, więc

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k \quad \text{lub} \quad x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k$$

Ograniczamy się do przedziału $\langle 0, \pi \rangle$ i otrzymujemy rozwiązania: $x = \frac{\pi}{3}$ lub $x = \pi$ lub $x = \frac{5}{9}\pi$.

Sposób 2.
Dzielimy obie strony równania $\cos(3x) + \sqrt{3}\sin(3x) + 1 = 0$ przez 2 i otrzymujemy kolejno

$$\cos(3x) + \sqrt{3}\sin(3x) + 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}\cos(3x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3x) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3}\cos(3x) + \sin\frac{\pi}{3}\sin(3x) = -\frac{1}{2}$$

Stąd, po zastosowaniu wzoru na cosinus różnicy argumentów, otrzymujemy równanie elementarne

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Zatem

$$3x - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k \quad \text{lub} \quad 3x - \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi + 2\pi k$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, więc

$$x=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi k \quad \text{lub} \quad x=\frac{5}{9}\pi+\frac{2}{3}\pi k$$

Ograniczamy się do przedziału $\langle 0,\pi\rangle$ i otrzymujemy rozwiązania: $x=\frac{\pi}{3}$ lub $x=\pi$ lub $x=\frac{5}{9}\pi$.

<u>Sposób 3.</u> (metoda analizy starożytnych)
Równanie zapisujemy w postaci $\cos(3x)+\sqrt{3}\sin(3x)=-1$ i podnosimy obie strony tego równania do kwadratu, otrzymując kolejno

$$\cos^2(3x)+2\sqrt{3}\sin(3x)\cos(3x)+3\sin^2(3x)=1$$

$$1+2\sin^2(3x)+2\sqrt{3}\sin(3x)\cos(3x)=1$$

$$2\sin 3x\left(\sin(3x)+\sqrt{3}\cos(3x)\right)=0$$

$$\sin(3x)=0 \quad \text{lub} \quad \sin(3x)+\sqrt{3}\cos(3x)=0$$

Rozwiązujemy równanie $\sin(3x)=0$:

$$3x=k\cdot\pi$$

$$x=\frac{1}{3}\pi\cdot k$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.
Sprawdzamy, czy wśród liczb postaci $\frac{1}{3}\pi\cdot k$, gdzie k jest liczbą całkowitą, nie ma rozwiązań obcych.
Gdy k jest liczbą parzystą, to wtedy

$$\cos\left(3\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot k\right)+\sqrt{3}\sin\left(3\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot k\right)+1=\cos(\pi\cdot k)+\sqrt{3}\sin(\pi\cdot k)+1=$$

$$=\cos 0+\sqrt{3}\sin 0+1=1+0+1\neq 0$$

Gdy k jest liczbą nieparzystą, to wtedy

$$\cos\left(3\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot k\right)+\sqrt{3}\sin\left(3\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot k\right)+1=$$

$$=\cos(\pi\cdot(k-1)+\pi)+\sqrt{3}\sin(\pi\cdot(k-1)+\pi)+1=$$

$$=\cos\pi+\sqrt{3}\sin\pi+1=-1+\sqrt{3}\cdot 0+1=0$$

Zatem liczby postaci $\frac{1}{3}\pi\cdot k$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieparzystą, są rozwiązaniami równania $\cos(3x)+\sqrt{3}\sin(3x)+1=0$.

Rozwiązujemy równanie $\sin(3x)+\sqrt{3}\cos(3x)=0$.

Liczby postaci $\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\pi\cdot k$, gdzie k jest liczbą całkowitą, nie spełniają równania

$\sin(3x)+\sqrt{3}\cos(3x)=0$, ponieważ $\sin\left(3\cdot\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\pi\cdot k\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k\right)\neq 0$

i $\cos\left(3\cdot\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\pi\cdot k\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k\right)=0$.

Natomiast gdy $x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\pi\cdot k$, gdzie k jest liczbą całkowitą, to wtedy $\cos(3x)\neq 0$, więc dzieląc równanie $\sin(3x)+\sqrt{3}\cos(3x)=0$ otrzymujemy kolejno

$$\sin(3x)+\sqrt{3}\cos(3x)=0$$

$$\operatorname{tg}(3x)+\sqrt{3}=0$$

$$\operatorname{tg}(3x)=-\sqrt{3}$$

$$3x=-\frac{\pi}{3}+\pi\cdot k$$

$$x=-\frac{\pi}{9}+\frac{1}{3}\pi\cdot k$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Sprawdzamy, czy wśród liczb postaci $-\frac{\pi}{9}+\frac{1}{3}\pi\cdot k$, gdzie k jest liczbą całkowitą, nie ma rozwiązań obcych.

Gdy k jest liczbą parzystą, to wtedy

$$\cos\left(3\cdot\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{1}{3}\pi\cdot k\right)\right)+\sqrt{3}\sin\left(3\cdot\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{1}{3}\pi\cdot k\right)\right)+1=$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\cdot k\right)+\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\cdot k\right)+1=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+1=$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1=0$$

Gdy k jest liczbą nieparzystą, to wtedy

$$\cos\left(3\cdot\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{1}{3}\pi\cdot k\right)\right)+\sqrt{3}\sin\left(3\cdot\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{1}{3}\pi\cdot k\right)\right)+1=$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\cdot k\right)+\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\cdot k\right)+1=$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\cdot(k-1)+\pi\right)+\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\cdot(k-1)+\pi\right)+1=$$

$$=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+1=-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1\neq 0$$

Zatem liczby postaci $-\frac{\pi}{9}+\frac{1}{3}\pi\cdot k$, gdzie k jest liczbą całkowitą parzystą, są rozwiązaniami równania $\cos(3x)+\sqrt{3}\sin(3x)+1=0$.

Zapisujemy rozwiązania równania $\cos(3x) + \sqrt{3}\sin(3x) + 1 = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$:
$x = \frac{\pi}{3}$ lub $x = \pi$ lub $x = \frac{5}{9}\pi$.

Zadanie 12. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 9.1) rozpoznaje w graniastosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów; 9.3) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości graniastosłupów.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy:

- obliczy miarę kąta DBC: $|\measuredangle DBC| = \alpha$

ALBO

- obliczy miarę kąta OCE: $|\measuredangle OCE| = \alpha$

ALBO

- obliczy miarę kąta BOC (lub AOD): $|\measuredangle BOC| = 90° - \alpha$

ALBO

- zapisze związek między $|CD|$, R oraz α otrzymany z zastosowania twierdzenia cosinusów do trójkąta COD, np. $|CD|^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos(2\alpha)$

ALBO

- zapisze $\frac{\frac{1}{2} \cdot |CD|}{R} = \sin\alpha$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy:

- obliczy długość podstawy CD trapezu (w zależności od R i α): $|CD| = 2R\sin\alpha$

ALBO

- obliczy wysokość h trapezu (w zależności od R i α): $h = R\cos\alpha$

ALBO

- zapisze związek między $|BC|$, R oraz α (otrzymany np. z zastosowania twierdzenia cosinusów do trójkąta BOC albo twierdzenia sinusów do trójkąta ABC), np. $|BC|^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos(90° - \alpha)$, $\frac{|BC|}{sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)} = 2R$.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy:

- obliczy długość ramienia BC (lub AD) trapezu (w zależności od R i α) oraz długość podstawy CD trapezu (w zależności od R i α): $|BC| = R \cdot \sqrt{2 - 2\sin\alpha}$ (lub $|AD| = R \cdot \sqrt{2 - 2\sin\alpha}$) oraz $|CD| = 2R\sin\alpha$

ALBO

- obliczy długość ramienia BC (lub AD) trapezu (w zależności od R i α) oraz wysokość h trapezu (w zależności od R i α): $|BC| = R \cdot \sqrt{2 - 2\sin\alpha}$ (lub $|AD| = R \cdot \sqrt{2 - 2\sin\alpha}$) oraz $h = R\cos\alpha$.

Zdający otrzymuje .... 4 p.
gdy:

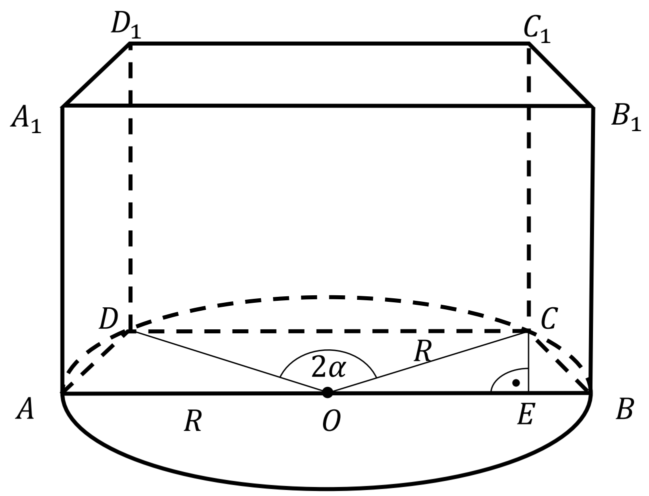
- obliczy wysokość H graniastosłupa (w zależności od R i α) oraz długość podstawy CD trapezu (w zależności od R i α): $H = R \cdot \sqrt{2 - 2\sin\alpha} \cdot \operatorname{tg}\alpha$ oraz $|CD| = 2R\sin\alpha$

ALBO

- obliczy wysokość H graniastosłupa (w zależności od R i α) oraz wysokość h trapezu (w zależności od R i α): $H = R \cdot \sqrt{2 - 2\sin\alpha} \cdot \operatorname{tg}\alpha$ oraz $h = R\cos\alpha$.

Zdający otrzymuje .... 5 p.
gdy obliczy objętość V graniastosłupa: $V = R^3 \cdot \sin\alpha \cdot (1 - \sin\alpha) \cdot \sqrt{2 - 2\sin\alpha}$.

Przykładowe rozwiązanie



Ponieważ $|\measuredangle COD| = 2\alpha$, więc $|\measuredangle DBC| = \alpha$ jako miara kąta wpisanego opartego na tym samym łuku, co kąt środkowy COD.

Obliczamy długość krótszej podstawy CD trapezu $ABCD$.
Okrąg o środku O i promieniu R jest okręgiem opisanym na trójkącie BCD. Do trójkąta BCD stosujemy twierdzenie sinusów i otrzymujemy

$$\frac{|CD|}{\sin|\measuredangle DBC|} = 2R$$

$$\frac{|CD|}{\sin\alpha} = 2R$$

Stąd $|CD| = 2R \cdot \sin\alpha$.

Ponieważ trójkąty AOD i BOC są przystające oraz $|\measuredangle COD| = 2\alpha$, więc

$$|\measuredangle AOD| = |\measuredangle BOC| = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha$$

Obliczamy wysokość h trapezu $ABCD$.
Niech CE będzie wysokością trapezu $ABCD$ opuszczoną z wierzchołka C na podstawę AB trapezu (zobacz rysunek powyżej). Z trójkąta OEC otrzymujemy

$$\frac{h}{R} = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$$

Stąd $h = R\cos\alpha$.

Obliczamy wysokość H graniastosłupa.
Miara kąta nachylenia przekątnej B_1C ściany bocznej BCC_1B_1 do płaszczyzny podstawy $ABCD$ jest równa α, więc

$$\frac{H}{|BC|} = \operatorname{tg}\alpha$$

Stosujemy do trójkąta BOC twierdzenie cosinusów i otrzymujemy

$$|BC|^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos|\measuredangle BOC|$$

$$|BC|^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos(90° - \alpha)$$

$$|BC|^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \sin\alpha$$

$$|BC| = R \cdot \sqrt{2 - 2\sin\alpha}$$

Zatem

$$H = |BC| \cdot \operatorname{tg}\alpha = R\sqrt{2 - 2\sin\alpha} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

Obliczamy objętość V graniastosłupa

$$V = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot h \cdot H$$

$$V = \frac{2R + 2R \cdot \sin\alpha}{2} \cdot R\cos\alpha \cdot R\sqrt{2 - 2\sin\alpha} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

Zatem objętość graniastosłupa jest równa $V = R^3 \sin\alpha \cdot (1 + \sin\alpha)\sqrt{2 - 2\sin\alpha}$.

Zadanie 13. (0–6)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R3.1) stosuje wzory Viète'a; R3.2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap
polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$ i warunku $4^2 + (m-3)\cdot 4 + m^2 - m - 6 \neq 0$.
Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.
Podział punktów za pierwszy etap rozwiązania:

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- rozwiąże nierówność $\Delta > 0$: $m \in \left(-\frac{11}{3}, 3\right)$

ALBO

- rozwiąże warunek $4^2 + (m-3)\cdot 4 + m^2 - m - 6 \neq 0$: $m \neq \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ i $m \neq \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy rozwiąże nierówność $\Delta > 0$ i warunek $4^2 + (m-3)\cdot 4 + m^2 - m - 6 \neq 0$:
$m \in \left(-\frac{11}{3}, 3\right)$ i $m \neq \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ i $m \neq \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

Uwaga do pierwszego etapu:
Jeżeli zdający rozważa warunek $\Delta \geq 0$, to za ten etap otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.

Drugi etap
polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5m - 51$. Za poprawne rozwiązanie tego warunku zdający otrzymuje **3 punkty**.
Podział punktów za drugi etap rozwiązania:
Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze nierówność $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5m - 51$ w postaci
$x_1 \cdot x_2 \cdot 4 > x_1^2 + x_2^2 + 4^2 - 5m - 51$ (lub równoważnej).

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy doprowadzi nierówność $x_1 \cdot x_2 \cdot 4 > x_1^2 + x_2^2 + 4^2 - 5m - 51$ do postaci nierówności z jedną niewiadomą m, np. $-[-(m-3)]^2 + 6 \cdot (m^2 - m - 6) + 5m + 35 > 0$.

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy wyznaczy te wszystkie wartości parametru m, dla których spełniony jest warunek $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5m - 51$: $m \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

Trzeci etap
polega na wyznaczeniu tych wszystkich wartości parametru m, dla których spełnione są jednocześnie wszystkie trzy warunki: $\Delta > 0$ i $4^2 + (m-3) \cdot 4 + m^2 - m - 6 \neq 0$ i $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5m - 51$. Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy poprawnie wyznaczy te wszystkie wartości parametru m, które spełniają jednocześnie warunki $\Delta > 0$ i $4^2 + (m-3) \cdot 4 + m^2 - m - 6 \neq 0$, i
$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5m - 51$: $m \in \left(-\frac{11}{3}, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, -2\right) \cup (1, 3)$.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający, rozwiązując warunek $4^2 + (m-3) \cdot 4 + m^2 - m - 6 \neq 0$, popełnia tylko błędy rachunkowe i rozwiązuje zadanie konsekwentnie do końca, to może otrzymać co najwyżej **5 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający nie rozważa warunku $4^2 + (m-3) \cdot 4 + m^2 - m - 6 \neq 0$, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.
W pierwszym etapie wyznaczamy wartości parametru m, dla których trójmian kwadratowy $x^2 + (m-3)x + m^2 - m - 6$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, z których każdy jest różny od 4.
W drugim etapie wyznaczamy te wszystkie wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5m - 51$.
W trzecim etapie wyznaczamy (na podstawie wyników uzyskanych w etapach I i II) te wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$(x-4)[x^2 + (m-3)x + m^2 - m - 6] = 0$$

ma trzy różne rozwiązania spełniające warunek $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5m - 51$.

I etap

Zauważmy, że liczba 4 jest rozwiązaniem równania

$$(x-4)[x^2+(m-3)x+m^2-m-6]=0 \qquad (1)$$

z niewiadomą x i parametrem m. Zatem równanie (1) ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste tylko wtedy, gdy równanie

$$x^2+(m-3)x+m^2-m-6=0 \qquad (2)$$

z niewiadomą x i parametrem m ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste, z których każde jest różne od 4, tj. tylko wtedy, gdy

$$\Delta > 0 \quad \text{i} \quad 4^2+(m-3)\cdot 4+m^2-m-6\neq 0$$

gdzie Δ jest wyróżnikiem trójmianu kwadratowego $x^2+(m-3)x+m^2-m-6$.
Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$(m-3)^2-4\cdot 1\cdot (m^2-m-6)>0$$

$$-3m^2-2m+33>0$$

$$(m-3)(-3m-11)>0$$

$$m\in\left(-\frac{11}{3},3\right)$$

Rozwiązujemy warunek $4^2+(m-3)\cdot 4+m^2-m-6\neq 0$:

$$m^2+3m-2\neq 0$$

$$m\neq\frac{-3-\sqrt{17}}{2} \quad \text{i} \quad m\neq\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$$

II etap

Wyznaczamy te wszystkie wartości parametru m, dla których spełniony jest warunek

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3 > x_1^2+x_2^2+x_3^2-5m-51$$

gdzie x_1, x_2, x_3 są rozwiązaniami równania (1).
Ponieważ liczba 4 jest rozwiązaniem równania (1), więc przyjmujemy $x_3=4$ i rozwiązujemy warunek

$$x_1\cdot x_2\cdot 4 > x_1^2+x_2^2+4^2-5m-51$$

gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami równania (2), korzystając ze wzorów Viète’a:

$$x_1\cdot x_2\cdot 4 > x_1^2+x_2^2+4^2-5m-51$$

$$4x_1\cdot x_2 > (x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2-5m-35$$

$$-(x_1+x_2)^2+6x_1\cdot x_2+5m+35>0$$

$$-[-(m-3)]^2+6\cdot(m^2-m-6)+5m+35>0$$

$$5m^2+5m-10>0$$

$$5(m-1)(m+2) > 0$$

$$m \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

III etap

Wyznaczamy te wszystkie wartości m, które spełniają jednocześnie następujące trzy warunki:

- $m \in \left(-\frac{11}{3}, 3\right)$
- $m \neq \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ i $m \neq \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$
- $m \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

Odpowiedź: $m \in \left(-\frac{11}{3}, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, -2\right) \cup (1, 3)$.

Zadanie 14. (0–6)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R8.1) oblicza odległość punktu od prostej; R8.2) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności; R8.3) wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu.

Zasady oceniania dla sposobu 1.

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap
polega na obliczeniu współrzędnych jednego z punktów wspólnych okręgu o_1 i prostej k oraz wyznaczeniu równania prostej przechodzącej przez środki okręgów o_1 i o_2.
Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.
Podział punktów za pierwszy etap rozwiązania:

Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy obliczy współrzędne jednego z punktów wspólnych okręgu o_1 i prostej k:
$A=\left(-\frac{19}{5},\frac{27}{5}\right)$ albo $B=(-1,-3)$.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy wyznaczy równanie prostej przechodzącej przez środki okręgów o_1 i o_2: $y=\frac{1}{3}x+2$.

Drugi etap
polega na wyznaczeniu równania okręgu o_2 . Za tę część rozwiązania zdający może otrzymać **4 punkty**.
Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy uzależni współrzędne środka S_2 okręgu o_2 od jednej niewiadomej, np.
$S_2=\left(a,\ \frac{1}{3}a+2\right)$.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą prowadzące do obliczenia współrzędnych środka okręgu o_2 , np.

$$\sqrt{\left(a-(-1)\right)^2+\left(\frac{1}{3}a+2-(-3)\right)^2}=2\sqrt{5}.$$

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy obliczy współrzędne środka S_2 okręgu o_2: $S_2 = (-3, 1)$.

Zdający otrzymuje .... 4 p.
gdy zapisze równanie okręgu o_2, np. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 20$.

Uwaga:
Jeżeli zdający nie odrzuci współrzędnych środka okręgu o_2, które nie spełniają warunków zadania i poda dwa równania okręgów, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.

Zasady oceniania dla sposobu 2.

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap
polega na obliczeniu współrzędnych punktów wspólnych A i B okręgu o_1 i prostej k oraz zapisaniu układu równań, w którym niewiadomymi są współrzędne środka okręgu o_2.
Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty.**
Podział punktów za pierwszy etap rozwiązania:

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy obliczy współrzędne punktu jednego z punktów: $A = \left(-\frac{19}{5}, \frac{27}{5}\right)$ lub $B = (-1, -3)$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy zapisze układ równań, w których niewiadomymi są współrzędne a i b środka okręgu o_2, np.

$$\begin{cases} (a-(-1))^2 + (b-(-3))^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 \\ \left(a-\left(-\frac{19}{5}\right)\right)^2 + \left(b-\frac{27}{5}\right)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 \end{cases}$$

Drugi etap
polega na wyznaczeniu równania okręgu o_2 . Za tę część rozwiązania zdający może otrzymać **4 punkty**.
Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze zależność liniową między współrzędnymi a i b środka okręgu o_2, np.
$a = 3b - 6$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą (a lub b) prowadzące do obliczenia współrzędnych środka okręgu o_2 , np.
$(3b-6)^2+b^2=-2(3b-6)-6b+10$.

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy obliczy współrzędne środka S_2 okręgu o_2: $S_2=(-3,1)$.

Zdający otrzymuje .... 4 p.
gdy zapisze równanie okręgu o_2, np. $(x+3)^2+(y-1)^2=20$.

Uwaga:
Jeżeli zdający nie odrzuci współrzędnych środka okręgu o_2, które nie spełniają warunków zadania i poda dwa równania okręgów, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>Sposób 1.</u>

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów.

I etap
Obliczamy współrzędne punktów A oraz B przecięcia okręgu o_1 i prostej k, rozwiązując układ równań $\begin{cases}(x-6)^2+(y-4)^2=98\\ y=-3x-6\end{cases}$.
Po podstawieniu do równania $(x-6)^2+(y-4)^2=98$ w miejsce y wyrażenia $-3x-6$ otrzymujemy

$$(x-6)^2+(-3x-6-4)^2=98$$

$$(x-6)^2+(-3x-10)^2=98$$

$$x^2-12x+36+9x^2+60x+100=98$$

$$10x^2+48x+38=0$$

$$5x^2+24x+19=0$$

$$\Delta=24^2-4\cdot 5\cdot 19=196$$

$$x=-\frac{19}{5}\quad \text{lub}\quad x=-1$$

Gdy $x=-\frac{19}{5}$, to $y=-3x-6=-3\cdot\left(-\frac{19}{5}\right)-6=\frac{27}{5}$.
Gdy $x=-1$, to $y=-3x-6=-3\cdot(-1)-6=-3$.
Zatem punkty przecięcia okręgów mają współrzędne: $A=\left(-\frac{19}{5},\frac{27}{5}\right)$, $B=(-1,-3)$.
Oznaczmy przez l prostą, która przechodzi przez środki okręgów o_1 i o_2. Niech $y=cx+d$ będzie równaniem kierunkowym tej prostej. Wyznaczamy równanie prostej l.

Prosta l jest prostopadła do k, więc $c = \frac{1}{3}$. Ponieważ środek okręgu o_1 leży na prostej l, więc $4 = \frac{1}{3} \cdot 6 + d$. Stąd $d = 2$ i prosta l ma równanie $y = \frac{1}{3}x + 2$.

II etap

Niech $S_2 = (a, b)$ będzie środkiem okręgu o_2. Punkt S_2 leży na prostej l, więc $S_2 = \left(a,\ \frac{1}{3}a + 2\right)$. Ponieważ $|BS_2| = 2\sqrt{5}$, więc

$$\sqrt{\left(a - (-1)\right)^2 + \left(\frac{1}{3}a + 2 - (-3)\right)^2} = 2\sqrt{5}$$

Stąd dalej otrzymujemy

$$(a + 1)^2 + \left(\frac{1}{3}a + 5\right)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2$$

$$a^2 + 2a + 1 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{10}{3}a + 25 = 20$$

$$\frac{10}{9}a^2 + \frac{16}{3}a + 6 = 0$$

$$5a^2 + 24a + 27 = 0$$

$$a = -3 \quad \text{lub} \quad a = -\frac{9}{5}$$

Gdy $a = -3$, to $b = \frac{1}{3}a + 2 = 1$.

Gdy $a = -\frac{9}{5}$, to $b = \frac{1}{3}a + 2 = \frac{7}{5}$. Punkt $\left(-\frac{9}{5}, \frac{7}{5}\right)$ nie spełnia warunków zadania.

Zatem $S_2 = (-3, 1)$.

Okrąg o_2 ma równanie $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 20$.

<u>Sposób 2.</u>

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów.

I etap

Obliczamy współrzędne punktów A oraz B przecięcia okręgu o_1 i prostej k, rozwiązując układ równań $\begin{cases} (x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 98 \\ y = -3x - 6 \end{cases}$.

Po podstawieniu do równania $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 98$ w miejsce y wyrażenia $-3x - 6$ otrzymujemy

$$(x - 6)^2 + (-3x - 6 - 4)^2 = 98$$

$$(x - 6)^2 + (-3x - 10)^2 = 98$$

$$x^2 - 12x + 36 + 9x^2 + 60x + 100 = 98$$

$$10x^2 + 48x + 38 = 0$$

$$5x^2 + 24x + 19 = 0$$

$$\Delta = 24^2 - 4 \cdot 5 \cdot 19 = 196$$

$$x = -\frac{19}{5} \quad \text{lub} \quad x = -1$$

Gdy $x = -\frac{19}{5}$, to $y = -3x - 6 = -3 \cdot \left(-\frac{19}{5}\right) - 6 = \frac{27}{5}$.

Gdy $x = -1$, to $y = -3x - 6 = -3 \cdot (-1) - 6 = -3$.

Zatem punkty przecięcia okręgów mają współrzędne: $A = \left(-\frac{19}{5}, \frac{27}{5}\right)$, $B = (-1, -3)$.

Niech $S_2 = (a, b)$ będzie środkiem okręgu o_2. Ponieważ punkty $A = \left(-\frac{19}{5}, \frac{27}{5}\right)$ oraz $B = (-1, -3)$ należą do okręgu o_2 o promieniu $2\sqrt{5}$, więc

$$\begin{cases} (a - (-1))^2 + (b - (-3))^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 \\ \left(a - \left(-\frac{19}{5}\right)\right)^2 + \left(b - \frac{27}{5}\right)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 \end{cases}$$

II etap

Obliczamy współrzędne środka okręgu o_2, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} (a + 1)^2 + (b + 3)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 \\ \left(a + \frac{19}{5}\right)^2 + \left(b - \frac{27}{5}\right)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 2a + 1 + b^2 + 6b + 9 = 20 \\ a^2 + \frac{38}{5}a + \frac{361}{25} + b^2 - \frac{54}{5}b + \frac{729}{25} = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = -2a - 6b + 10 \\ a^2 + b^2 + \frac{38}{5}a - \frac{54}{5}b = -\frac{590}{25} \end{cases}$$

Po zastąpieniu w równaniu $a^2 + \frac{38}{5}a + \frac{361}{25} + b^2 - \frac{34}{5}b + \frac{729}{25} = 20$ wyrażenia $a^2 + b^2$ przez wyrażenie $-2a - 6b + 10$ otrzymujemy dalej

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = -2a - 6b + 10 \\ -2a - 6b + 10 + \frac{38}{5}a - \frac{54}{5}b = -\frac{590}{25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = -2a - 6b + 10 \\ \frac{28}{5}a - \frac{84}{5}b = -\frac{840}{25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = -2a - 6b + 10 \\ a = 3b - 6 \end{cases}$$

Po podstawieniu do równania $a^2 + b^2 = -2a - 6b + 10$ w miejsce a wyrażenia $3b - 6$ otrzymujemy

$$(3b-6)^2 + b^2 = -2(3b-6) - 6b + 10$$

$$9b^2 - 36b + 36 + b^2 = -6b + 12 - 6b + 10$$

$$10b^2 - 24b + 14 = 0$$

$$\Delta = (-24)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 14 = 16$$

$$b = 1 \quad \text{lub} \quad b = \frac{7}{5}$$

Gdy $b = 1$, to $a = -3$.
Gdy $b = \frac{7}{5}$, to $a = -\frac{9}{5}$. Punkt $\left(-\frac{9}{5}, \frac{7}{5}\right)$ nie spełnia warunków zadania.
Zatem $S_2 = (-3, 1)$.
Okrąg o_2 ma równanie $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 20$.

Zadanie 15. (0–7)

Wymagania egzaminacyjne 2022	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: R11.6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Łącznie za zadanie zdający może otrzymać 7 punktów: 2 punkty za rozwiązanie podpunktu a), 1 punkt za rozwiązanie podpunktu b) oraz 4 punkty za rozwiązanie podpunktu c).

Zasady oceniania dla podpunktu a)

Zdający otrzymuje .... **1 p.**

gdy zapisze długość a podstawy AB trójkąta oraz wysokość h trójkąta opuszczoną na podstawę AB w zależności od odległości x środka okręgu opisanego na trójkącie od podstawy AB trójkąta: $a = 2\sqrt{1-x^2}$ i $h = x+1$.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**

gdy wykaże, że pole P trójkąta jako funkcja zmiennej x wyraża się wzorem $P(x) = (x+1)\cdot\sqrt{1-x^2}$.

Zasady oceniania dla podpunktu b)

Zdający otrzymuje .... **1 p.**

gdy zapisze, że dziedziną funkcji P jest przedział $(0,1)$.

Zasady oceniania dla podpunktu c)

Zdający otrzymuje .... **1 p.**

gdy:

- wyznaczy pochodną funkcji f: $f'(x) = -4x^3 - 6x^2 + 2$ dla $x \in (0,1)$ (dla sposobu 1.)

ALBO

- pokaże, że dla każdego trójkąta EFG wpisanego w okrąg o promieniu R można wskazać trójkąt $\mathcal{T}$ wpisany w ten okrąg taki, że $P_{\Delta EFG} \le P_{\Delta\mathcal{T}}$ i jeden z boków trójkąta $\mathcal{T}$ jest oparty na łuku długości $\frac{2}{3}\pi R$ (dla sposobu 2.).

Zdający otrzymuje .... **2 p.**

gdy:

- obliczy miejsca zerowe pochodnej funkcji f: $x = \frac{1}{2}$ (dla sposobu 1.)

ALBO

- pokaże, że spośród wszystkich rozpatrywanych trójkątów największe pole ma trójkąt równoboczny (dla sposobu 2.).

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy:

- zbada znak pochodnej funkcji f oraz wyznaczy (z uzasadnieniem) wartość zmiennej x, dla której funkcja f przyjmuje wartość największą, np.:
  $f'(x) > 0$ dla $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.
  Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ i malejąca w przedziale $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$, więc osiąga wartość największą dla argumentu $x = \frac{1}{2}$. (dla sposobu 1.)

ALBO

- pokaże, że spośród wszystkich rozpatrywanych trójkątów największe pole ma trójkąt równoboczny i obliczy pole tego trójkąta równobocznego lub x: $P_\Delta = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ lub $x = \frac{1}{2}$ (dla sposobu 2.).

Zdający otrzymuje .... 4 p.
gdy:

- wyznaczy wśród rozważanych trójkątów taki trójkąt, którego pole jest największe i obliczy to największe pole: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (dla sposobu 1.)

ALBO

- pokaże, że spośród wszystkich rozpatrywanych trójkątów największe pole ma trójkąt równoboczny oraz obliczy pole tego trójkąta równobocznego oraz x: $P_\Delta = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ oraz $x = \frac{1}{2}$ (dla sposobu 2.).

Uwagi do podpunktu c):

1. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-”, znak pochodnej.
2. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość największą dla wyznaczonej wartości x, przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuacje, gdy zdający:

   - opisuje słownie lub graficznie (np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji f

   lub

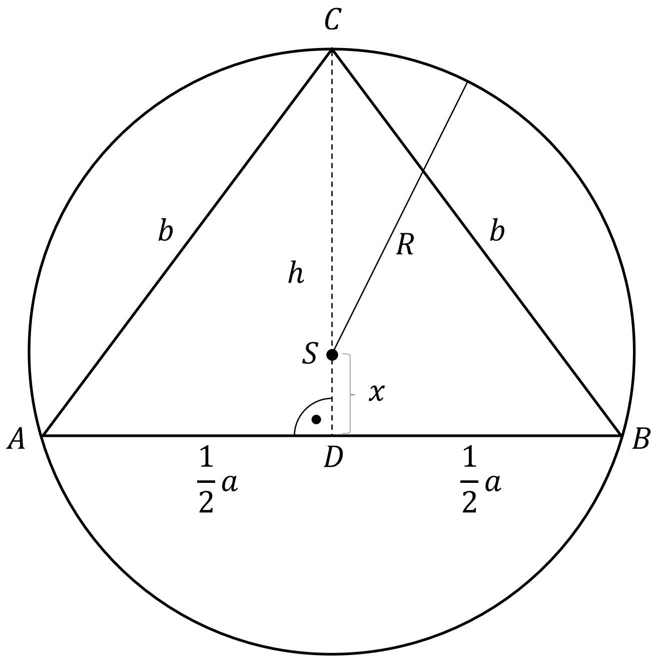
   - zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja f ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość.

Jeśli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (za wyznaczenie pochodnej funkcji f oraz obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji f).

3. Jeżeli zdający błędnie wyznaczy dziedzinę funkcji P, ale ta dziedzina jest podzbiorem przedziału $(0, 1)$, to może otrzymać punkt za zbadanie znaku pochodnej i wyznaczenie argumentu, dla którego funkcja f przyjmuje wartość największą, o ile miejsce zerowe pochodnej należy do wyznaczonej dziedziny.

Przykładowe pełne rozwiązania

a)
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku: a – długość podstawy trójkąta, b – długość ramienia trójkąta, h – wysokość trójkąta, x – odległość środka okręgu opisanego na trójkącie od podstawy AB trójkąta, S – środek okręgu opisanego na trójkącie, D – spodek wysokości CD poprowadzonej z wierzchołka C na podstawę AB trójkąta.



Promień okręgu jest równy 1, więc $h = x + 1$.
Z geometrycznych warunków zadania wynika, że $a \in (0, 2)$ oraz $x \in (0, 1)$.
Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta SDB i wyznaczamy a w zależności od x:

$$|SD|^2 + |DB|^2 = |BS|^2$$

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = 1$$

$$a = 2\sqrt{1 - x^2}$$

gdzie $x > 0$ i $1 - x^2 > 0$, tj. dla $x \in (0, 1)$.
Zatem pole P trójkąta ABC jest równe

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

$$P(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - x^2} \cdot (x + 1)$$

$$P(x) = (x + 1) \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

dla $x \in (0, 1)$.

Uwaga:
Pole P trójkąta ABC można obliczyć, korzystając ze wzoru Herona. Trójkąt jest równoramienny, więc połowa p obwodu jest równa $\frac{a+2b}{2}$. Zatem

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-b)} = \sqrt{\frac{a+2b}{2} \cdot \frac{2b-a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{4b^2-a^2}{4} \cdot \frac{a^2}{4}}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkątów BCD oraz SDB i otrzymujemy kolejno:

$$|BC|^2 = |CD|^2 + |DB|^2 \quad \text{i} \quad |SD|^2 + |DB|^2 = |BS|^2$$

$$b^2 = (x+1)^2 + \frac{1}{4}a^2 \quad \text{i} \quad x^2 + \frac{1}{4}a^2 = 1^2$$

$$4b^2 - a^2 = 4(x+1)^2 \quad \text{i} \quad \frac{1}{4}a^2 = 1 - x^2$$

Zatem

$$P = \sqrt{\frac{4b^2-a^2}{4} \cdot \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4(x+1)^2}{4} \cdot (1-x^2)} = (x+1) \cdot \sqrt{1-x^2}$$

dla $x > 0$ i $1 - x^2 > 0$, tj. dla $x \in (0,1)$.

b)
Dziedziną funkcji P zmiennej x jest przedział $(0,1)$.

c)
<u>Sposób 1.</u>
Przekształcamy wzór funkcji P:

$$P(x) = (x+1) \cdot \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(x+1)^2 \cdot (1-x^2)} = \sqrt{(x^2+2x+1)(1-x^2)}$$

$$P(x) = \sqrt{-x^4 - 2x^3 + 2x + 1}$$

Wyznaczamy wartość największą funkcji P w przedziale $(0,1)$.
Tworzymy funkcję pomocniczą f określoną wzorem $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 2x + 1$ dla każdego $x \in (0,1)$ i szukamy argumentu, dla którego funkcja ta osiąga wartość największą.
Obliczamy pochodną funkcji f: $f'(x) = -4x^3 - 6x^2 + 2$ dla $x \in (0,1)$.
Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji f.
Zauważmy, że liczba (-1) jest pierwiastkiem wielomianu $-4x^3 - 6x^2 + 2$. Dzielimy wielomian $-4x^3 - 6x^2 + 2$ przez dwumian $x + 1$ i otrzymujemy trójmian $-4x^2 - 2x + 2$.
Obliczamy pierwiastki tego trójmianu: $x = -1$ i $x = \frac{1}{2}$. Ponieważ $(-1) \notin (0,1)$, więc $f'(x) = 0$ tylko dla $x = \frac{1}{2}$.

Ponieważ $f'(x) > 0$ dla $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, więc funkcja f jest rosnąca w przedziale $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ i malejąca w przedziale $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Zatem funkcja f osiąga wartość największą dla argumentu $x = \frac{1}{2}$.

Ponieważ funkcja $y(t) = \sqrt{t}$, określona dla $t \geq 0$, jest funkcją rosnącą, więc funkcja P osiąga wartość największą dla tego samego argumentu, dla którego funkcja f osiąga wartość największą.

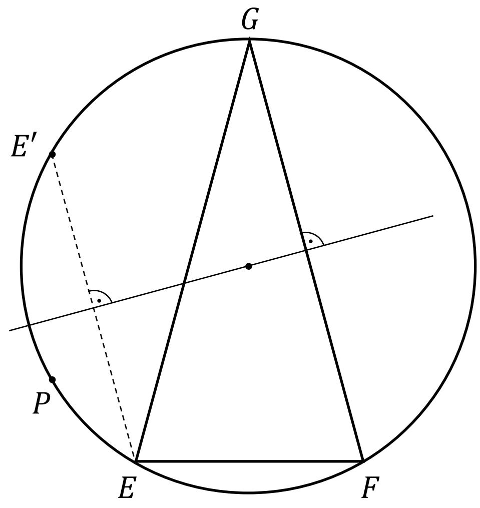
Zatem funkcja P osiąga wartość największą dla $x = \frac{1}{2}$.

Spośród rozważanych trójkątów największe pole ma ten, dla którego odległość x środka okręgu opisanego na tym trójkącie od podstawy AB tego trójkąta jest równa $\frac{1}{2}$. Pole tego trójkąta jest równe $P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

<u>Sposób 2.</u>

Pokażemy, że spośród wszystkich rozważanych trójkątów największe pole ma trójkąt równoboczny.

Rozważmy dowolny trójkąt wpisany w dany okrąg o obwodzie $L = 2\pi R$. Jego wierzchołki dzielą okrąg na trzy łuki. Jeśli dany trójkąt nie jest równoboczny, to nazwijmy jego wierzchołki tak, by łuk EF miał długość mniejszą, a łuk EG – większą od $L/3$. Niech E' będzie punktem symetrycznym do punktu E względem symetralnej boku FG. Wówczas każdy punkt P łuku EE' jest bardziej oddalony od boku FG niż punkt E, zatem pole trójkąta EFG jest mniejsze niż pole trójkąta PFG: $P_{\Delta EFG} < P_{\Delta PFG}$. Ponieważ łuk $E'G$ ma długość mniejszą od $L/3$, punkt P możemy wybrać tak, by łuk PG miał długość dokładnie równą $L/3$.



Jeśli punkt F dzieli łuk GP na połowy, to trójkąt PFG jest równoboczny i dowód jest zakończony. W przeciwnym przypadku jeden z łuków PF, FG ma długość większą, a drugi mniejszą od $L/3$. Postępując dokładnie tak samo jak w pierwszym kroku dowodu,

znajdziemy punkt Q taki, że łuki PQ oraz QG mają długość $L/3$ oraz pole $P_{\Delta PFG} < P_{\Delta PQG}$, co kończy dowód, bo trójkąt PQG jest równoboczny.
Trójkąt równoboczny wpisany w okrąg o promieniu $R = 1$ ma bok długości $a = \sqrt{3}R = \sqrt{3}$ i wysokość równą $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$. Pole tego trójkąta jest równe $\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ natomiast $x = h - R = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

Uwaga:
Zdający może rozwiązywać zadanie, wykorzystując nierówność między średnimi arytmetyczną i geometryczną.
Z zależności między średnimi arytmetyczną i geometryczną zastosowanej dla liczb dodatnich $\frac{x+1}{3}$, $\frac{x+1}{3}$, $\frac{x+1}{3}$, $1 - x$ otrzymujemy

$$\frac{\frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{3} + 1 - x}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{x+1}{3} \cdot \frac{x+1}{3} \cdot \frac{x+1}{3} \cdot (1 - x)}$$

$$\frac{1}{2} \geq \sqrt{\sqrt{\frac{x+1}{3} \cdot \frac{x+1}{3} \cdot \frac{x+1}{3} \cdot (1 - x)}}$$

$$\frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{x+1}{3} \cdot \frac{x+1}{3} \cdot \frac{x+1}{3} \cdot (1 - x)}$$

$$\frac{1}{4} \geq \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot (x + 1) \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

$$\frac{1}{4} \geq \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot P(x)$$

$$P(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

przy czym równość zachodzi jedynie wtedy, gdy $\frac{x+1}{3} = 1 - x$, czyli gdy $x = \frac{1}{2}$.