CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

# EGZAMIN MATURALNY

# W ROKU SZKOLNYM 2019/2020

# MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

FORMUŁA OD 2015

(„NOWA MATURA")

## ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ MMA-R1A1P-203

**CZERWIEC 2020**

## Egzaminatorze!

- Oceniaj prace zdających uczciwie i z zaangażowaniem.
- **Stosuj przyjęte zasady oceniania w sposób obiektywny**. Pamiętaj, że każda merytorycznie poprawna odpowiedź, spełniająca warunki określone w poleceniu, musi zostać pozytywnie oceniona, nawet jeżeli nie została przewidziana w przykładowych odpowiedziach w zasadach oceniania.
- Konsultuj niejednoznaczne rozwiązania zadań z innymi egzaminatorami lub przewodniczącym zespołu egzaminatorów. W przypadku niemożności osiągnięcia wspólnego stanowiska, rozstrzygajcie na korzyść zdającego.
- Przyznając punkty, nie kieruj się emocjami.
- Informuj przewodniczącego o wszystkich nieprawidłowościach zaistniałych w trakcie oceniania, w tym podejrzeń o niesamodzielność w pisaniu pracy.

| Numer zadania | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Odpowiedź | **D** | **C** | **C** | **B** |

**Klucz punktowania zadań kodowanych**

**Zadanie 5. (0–2)**

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego $(a_n)$, określonego dla $n \geq 1$, jest równa 2, a suma kwadratów wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 3. Oblicz iloraz ciągu $(a_n)$.

W kratki poniżej wpisz kolejno – od lewej do prawej – cyfrę jedności, części dziesiętnych i setnych otrzymanego wyniku.

| | | |
|---|---|---|
| | | |

## Przykładowe rozwiązanie

Suma wszystkich wyrazów ciągu $(a_n)$ jest równa 2, zatem $\frac{a_1}{1-q} = 2$.

Suma kwadratów wszystkich wyrazów ciągu $(a_n)$ jest równa 3, a zatem $\frac{a_1^2}{1-q^2} = 3$.

Stąd wynika, że $7q^2 - 8q + 1 = 0$.

Rozwiązaniami równania są $q = \frac{1}{7}$ lub $q = 1$.

Rozwiązanie $q = 1$ jest sprzeczne, ponieważ nie spełnia warunku zbieżności nieskończonego ciągu geometrycznego $|q| < 1$. Zatem $q = \frac{1}{7} = 0,(142857)$.

**Zad 5.**

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 4 |

**Zadanie 6. (0–3)**

Pierwszy wyraz ciągu $(a_n)$, określonego dla $n \geq 1$, jest równy 2. Wszystkie wyrazy tego ciągu spełniają warunek $a_n = 3 \cdot a_{n+1} + n^2$. Oblicz sumę $a_1 + a_2 + a_3$.

**Rozwiązanie**

Wyznaczamy kolejno wyrazy;

dla $n = 1$ otrzymujemy: $a_1 = 3 \cdot a_2 + 1$, czyli $a_2 = \frac{1}{3}$,

dla $n = 2$ otrzymujemy: $a_2 = 3 \cdot a_3 + 4$, czyli $a_3 = -\frac{11}{9}$.

Stąd $a_1 + a_2 + a_3 = 2 + \frac{1}{3} - \frac{11}{9} = \frac{10}{9}$.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje .............................................................................................................. 1 p.**

gdy obliczy drugi wyraz ciągu $(a_n)$: $a_2 = \frac{1}{3}$

**Zdający otrzymuje .............................................................................................................. 2 p.**

gdy obliczy trzeci wyraz ciągu $(a_n)$: $a_3 = -\frac{11}{9}$

**Zdający otrzymuje .............................................................................................................. 3 p.**

gdy obliczy sumę $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{10}{9}$.

**Zadanie 7. (0–3)**

Dany jest czworokąt wypukły, którego kolejnymi wierzchołkami są punkty *A*, *B*, *C* i *D*. Wykaż, że jeżeli $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB|$, to $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$.

**Przykładowe sposoby rozwiązania zadania**

**I sposób**

Niech $a = |AB|$, $\alpha = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$, $r_1$ – promień okręgu opisanego na trójkącie *ACB* ,

$r_2$ – promień okręgu opisanego na trójkącie *ADB*.

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta *ACB* i dla trójkąta *ADC* wynika, że

$$\frac{|AB|}{\sin \sphericalangle ACB} = 2r_1 \text{ oraz } \frac{|AB|}{\sin \sphericalangle ADB} = 2r_2,$$

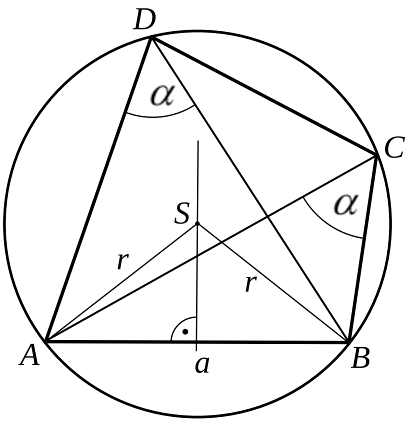
czyli

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2r_1 \text{ oraz } \frac{a}{\sin \alpha} = 2r_2.$$

Stąd wynika, że $r_1 = r_2$.

Ponieważ odcinek *AB* jest wspólnym bokiem trójkątów *ACB* i *ADB*, więc środki okręgów opisanych na tych trójkątach leżą na symetralnej tego boku. Z faktu, że czworokąt *ABCD* jest wypukły, wynika natomiast, że punkty *C* i *D* leżą po tej samej stronie prostej *AB*.

Stąd i z równości $r_1 = r_2$ wynika, że środki obu tych okręgów pokrywają się, co oznacza, że okrąg opisany na trójkącie *ACB* jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie *ADB*.




Jest to więc okrąg opisany na czworokącie *ABCD*. Kąty *BAC* i *BDC* są równe, gdyż są to kąty wpisane w ten okrąg, oparte na tym samym łuku *BC*. To kończy dowód.

**Schemat punktowania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .......................................................................1 pkt**

Zdający wykaże, że promienie okręgów opisanych na trójkątach *ACB* i *ADB* są równe.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .......................................................................2 pkt**

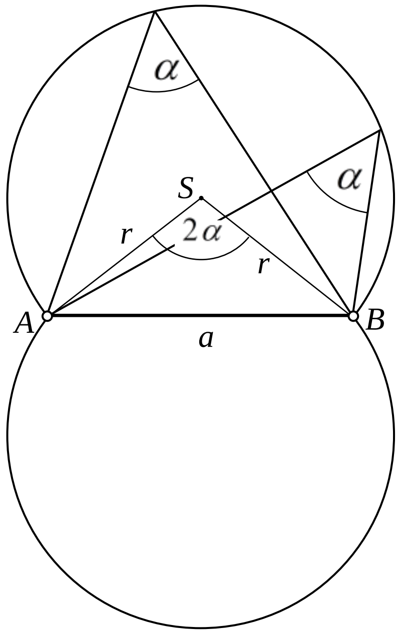
Zdający uzasadni, że na czworokącie *ABCD* można opisać okrąg.

**Uwaga**
Jeżeli zdający z faktu, że promienie okręgów opisanych na trójkątach *ACB* i *ADB* są równe oraz z faktu, że środki tych okręgów leżą na tej samej prostej, wywnioskuje, że okręgi opisane na trójkątach *ACB* i *ADB* pokrywają się, to otrzymuje **2 punkty**.

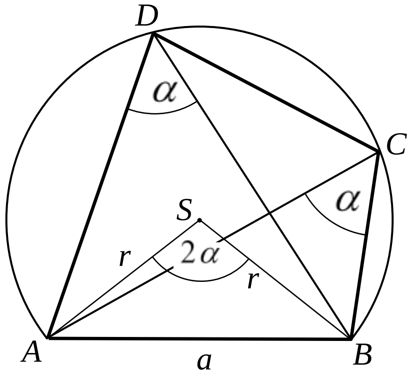
**Rozwiązanie pełne ...............................................................................................................3 pkt**

Zdający uzasadni, że kąty *BAC* i *BDC* są równe.

**II sposób**
Miejscem geometrycznym punktów, z których odcinek *AB* widać pod tym samym kątem $\alpha = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$, jest suma łuków (bez końców) $\overset{\frown}{AB}$ okręgów, których ten odcinek jest wspólną cięciwą, przy czym łuk leżący po jednej stronie prostej *AB* jest symetryczny do łuku leżącego po drugiej stronie tej prostej.




Wierzchołki $C$ i $D$ czworokąta $ABCD$ leżą na jednym z tych łuków, gdyż czworokąt ten jest wypukły.
Oznacza to, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.




Kąty $BAC$ i $BDC$ są równe, gdyż są to kąty wpisane w ten okrąg, oparte na tym samym łuku $BC$. To kończy dowód.

**Schemat punktowania II sposobu rozwiązania**

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....................................................................2 pkt**

Zdający uzasadni, że na czworokącie *ABCD* można opisać okrąg, odwołując się do miejsca geometrycznego punktów, z których odcinek *AB* widać pod tym samym kątem
$\alpha = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$.

**Uwaga**
Jeżeli zdający z faktu, że promienie okręgów opisanych na trójkątach *ACB* i *ADB* są równe oraz z faktu, że środki tych okręgów leżą na tej samej prostej, wywnioskuje, że okręgi opisane na trójkątach *ACB* i *ADB* pokrywają się, to otrzymuje **2 punkty**.

**Rozwiązanie pełne ..............................................................................................................3 pkt**

Zdający uzasadni, że kąty *BAC* i *BDC* są równe .

**Zadanie 8. (0–3)**
Wykaż, że dla każdej liczby nieparzystej *n* wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 3$ jest podzielne przez 16.

**Rozwiązanie (I sposób)**
Przekształcamy wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 3$ równoważnie w następujący sposób

$$n^4 \cdot (n-3) - (n-3)$$
$$(n^4 - 1) \cdot (n-3)$$
$$(n^2 - 1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n-3)$$
$$(n-1) \cdot (n+1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n-3)$$

Liczba *n* jest nieparzysta więc liczby $(n-1),(n+1),(n^2+1),(n-3)$ są parzyste zatem ich iloczyn jest podzielny przez $2^4$.Wyrażenie jest sumą dwóch składników podzielnych przez 16 więc jest podzielne przez 16.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ............................................................................................................ 1 p.**

gdy zapisze wyrażenie w postaci: $(n^4 - 1) \cdot (n-3) + 16$.

**Zdający otrzymuje ............................................................................................................ 2 p.**

gdy zapisze nierówność w postaci: $(n-1) \cdot (n+1) \cdot (n^2+1) \cdot (n-3) + 16$ i nie uzasadni podzielności przez 16.

**Zdający otrzymuje ............................................................................................................ 3 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Rozwiązanie (II sposób)**
Ponieważ liczba *n* jest nieparzysta możemy zapisać ją w postaci *2k+1*, gdzie *k* jest liczbą całkowitą.
Wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 3$ przyjmuje postać:

$(2k+1)^5 - 3(2k+1)^4 - (2k+1) + 3$.

Po przekształceniu wyrażenia równoważnie otrzymujemy

$32n^5 + 32n^4 - 16n^3 - 32n^2 - 16n + 16$,

stąd wyrażenie możemy zapisać w postaci iloczynu $16(2n^5 + 2n^4 - n^3 - 2n^2 - n + 1)$, który jako iloczyn liczby 16 oraz całkowitej liczby $(2n^5 + 2n^4 - n^3 - 2n^2 - n + 1)$ jest podzielny przez 16.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**

gdy zapisze wraz z odpowiednimi założeniami wyrażenie $(2k+1)^5 - 3(2k+1)^4 - (2k+1) + 19$ i przekształci poprawnie przynajmniej jedno z wyrażeń.

$(2k+1)^5 = 32n^5 + 80n^4 + 80n^3 + 40n^2 + 10n + 1$ lub

$(2k+1)^4 = 16n^4 + 32n^3 + 24n^2 + 8n + 1$.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 2 p.**

gdy doprowadzi wyrażenie do postaci $32n^5 + 32n^4 - 16n^3 - 32n^2 - 16n + 16$ i nie uzasadni, że to wyrażenie jest podzielne przez 16.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 3 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

## Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż równanie $4\sin^3 x + \sin 2x = 2\sin^2 x \cdot (2\cos x + 1)$.

**Rozwiązanie (I sposób)**

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$4\sin^3 x + 2\sin x\cos x = 4\sin^2 x\cos x + 2\sin^2 x$$

$$4\sin^3 x + 2\sin x\cos x - 4\sin^2 x\cos x - 2\sin^2 x = 0$$

$$2\sin x\left(2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x\right) = 0$$

Stąd otrzymujemy alternatywę

$$\sin x = 0 \text{ lub } 2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ lub } 2\sin x(\sin x - \cos x) + \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ lub } (\sin x - \cos x)(2\sin x - 1) = 0$$

Zatem

$$\sin x = 0 \text{ lub } \sin x = \cos x \text{ lub } \sin x = \frac{1}{2}$$

Zauważmy, że drugie równanie tej alternatywy jest równoważne równaniu $\operatorname{tg} x = 1$.

Gdyby zachodziło $\cos x = 0$, to otrzymalibyśmy równość $\sin x = 0$, a to byłoby sprzeczne z tożsamością $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . Ostatecznie zapisujemy cztery serie rozwiązań podanego równania:

$x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie $k$ oznacza liczbę całkowitą.

**Schemat punktowania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania**
**……………..………………………………………………………………………1p.**

Zdający zapisze dane równanie w postaci iloczynu, np.

$$2\sin x\left(2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x\right) = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp……..………………………………………………………………………. 2p.**

Zdający zapisze dane równanie w postaci iloczynu

$$\left(\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x\right)\left(2\sin x - 1\right) = 0 \text{ lub } \left(2\sin^2 x - \sin 2x\right)\left(2\sin x - 1\right) = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....………………………………………………………………………….3p.**

Zdający poprawnie rozwiąże **dwa spośród trzech równań**:

$$\sin x = 0,\ 2\sin x - 1 = 0,\ \sin x - \cos x = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy .

**Rozwiązanie pełne…………………………......……………………………………………………4p.**

Zdający zapisze cztery serie rozwiązań danego równania:

$x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k$ oznacza liczbę całkowitą.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$4\sin^3 x + 2\sin x\cos x = 4\sin^2 x\cos x + 2\sin^2 x$$

$$4\sin^3 x + 2\sin x\cos x - 4\sin^2 x\cos x - 2\sin^2 x = 0$$

$$2\sin x\left(2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x\right) = 0$$

Stąd otrzymujemy alternatywę

$$\sin x = 0 \text{ lub } 2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x = 0$$

Równanie $2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x = 0$ zapisujemy w postaci

$$2\sin^2 x - \left(2\cos x + 1\right)\sin x + \cos x = 0$$

i rozwiązujemy je tak samo jak równanie kwadratowe z niewiadomą $\sin x$ i parametrem $\cos x$.

Otrzymujemy wtedy wyróżnik $\Delta = \left(2\cos x - 1\right)^2$ oraz dwa rozwiązania:

$$\sin x = \frac{2\cos x + 1 - |2\cos x - 1|}{4} \text{ lub } \sin x = \frac{2\cos x + 1 + |2\cos x - 1|}{4}$$

Jeśli $\cos x \geq \frac{1}{2}$ , to otrzymujemy rozwiązania $\sin x = \frac{1}{2}$ lub $\sin x = \cos x$. Zatem w tym przypadku

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Jeśli zaś $\cos x < \frac{1}{2}$, to otrzymujemy rozwiązania $\sin x = \cos x$ lub $\sin x = \frac{1}{2}$. W tym przypadku

$$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi .$$

Ostatecznie możemy zapisać cztery serie rozwiązań podanego równania:

$x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie $k$ oznacza liczbę całkowitą.

**Schemat punktowania II sposobu rozwiązania**
**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ……………..……………………………………………………………………1p.**
Zdający zapisze dane równanie w postaci iloczynu, np.

$$2\sin x\left(2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x\right) = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp…….……………………………………………………………………………. 2p.**
Zdający zapisze równanie $2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x = 0$ w postaci

$$2\sin^2 x - \left(2\cos x + 1\right)\sin x + \cos x = 0 ,$$

obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego z lewej strony równania $\Delta = \left(2\cos x - 1\right)^2$ i zapisze dwa rozwiązania tego równania

$$\sin x = \frac{2\cos x + 1 - |2\cos x - 1|}{4} \text{ lub } \sin x = \frac{2\cos x + 1 + |2\cos x - 1|}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....…………………………………………………………………………3p.**
Zdający rozpatrzy poprawnie jeden z przypadków:

- jeśli $\cos x \ge \frac{1}{2}$ , to $\sin x = \frac{1}{2}$ lub $\sin x = \cos x$.

  Zatem w tym przypadku $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

**albo**

- jeśli zaś $\cos x < \frac{1}{2}$, to $\sin x = \cos x$ lub $\sin x = \frac{1}{2}$.

  Zatem w tym przypadku $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ .

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy .

**Rozwiązanie pełne…………………………......…………………………………………………………….…….4p.**
Zdający zapisze cztery serie rozwiązań danego równania:
$x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k$ oznacza liczbę całkowitą.

**Uwagi:**

1. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania przez $\sin x$ **lub** przez $(2\sin x - 1)$, bez zapisania odpowiedniego komentarza opisującego przypadki $\sin x = 0$ oraz $2\sin x - 1 = 0$ , to za całe rozwiązanie może otrzymać najwyżej **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania przez $\sin x$ **i** przez $(2\sin x - 1)$, bez zapisania odpowiedniego komentarza opisującego przypadki $\sin x = 0$ oraz $2\sin x - 1 = 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający w rozwiązaniach nie uwzględni okresowości funkcji trygonometrycznych i zapisuje przykładowe rozwiązania z każdej serii, np. $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{\pi}{4}$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający stosuje w rozwiązaniu fałszywe równości, np. $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, to za całe rozwiązanie może otrzymać najwyżej **2 punkty**, o ile wcześniej nie nabył praw do **3 punktów**.
5. Jeżeli zdający stosuje w rozwiązaniu równość $\sin x \cdot \cos x = \mathrm{tg}x \cdot \cos^2 x$, bez odpowiedniego komentarza, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
6. Jeżeli zdający podczas doprowadzania równania do postaci iloczynu stosuje nieistniejące „wzory” skróconego mnożenia, np.
$$(a - b - c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad \text{lub} \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2),$$
to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**, o ile wcześniej nie nabył praw do **1 punktu**.

**Zadanie 10. (0–4)**

Dla pewnych liczb rzeczywistych $a>1$, $b>1$ i $N>1$ jest spełniona równość

$$\log_{a^2b} N=\frac{3}{20}\cdot\left(\log_a N+\log_b N\right).$$

Wyznacz wszystkie wartości wyrażenia $\log_a b$.

**Rozwiązanie**

Wprowadzamy jednakową podstawę $a$ dla logarytmów i otrzymujemy:

$$\frac{20\log_a N}{\log_a\left(a^2b\right)}=3\left(\log_a N+\frac{\log_a N}{\log_a b}\right)$$

Ponieważ $\log_a N\neq 0$, więc powyższa równość jest równoważna równości

$$\frac{20}{2+\log_a b}=3+\frac{3}{\log_a b}$$

Zapisujemy zatem kolejno:

$$20\log_a b=3\log_a b\left(2+\log_a b\right)+3\left(2+\log_a b\right)$$

$$3\left(\log_a b\right)^2-11\log_a b+6=0.$$

To równanie ma dwa rozwiązania $\log_a b=3$ lub $\log_a b=\frac{2}{3}$, będące poszukiwanymi wartościami wyrażenia $\log_a b$.

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ……………………………………………………………………………………1p.**

Zdający zapisze podaną równość w postaci $\frac{20\log_a N}{\log_a\left(a^2b\right)}=3\left(\log_a N+\frac{\log_a N}{\log_a b}\right)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ……………………………………………………………………………………2p.**

Zdający zapisze równanie wymierne z niewiadomą $\log_a b$.

$$\frac{20}{2+\log_a b}=3+\frac{3}{\log_a b}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania……………………………………………………………………………………3p.**

Zdający przekształci powyższe równanie do postaci równania kwadratowego, np.

$$20\log_a b=3\log_a b\left(2+\log_a b\right)+3\left(2+\log_a b\right)$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne……………………………………………………………………………………4p.**

Zdający rozwiąże powyższe równanie i zapisze, że szukane wyrażenie przyjmuje dwie wartości:

$$\log_a b = 3 \text{ lub } \log_a b = \frac{2}{3}.$$

**Uwagi:**

1. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci: $\log_b a = \frac{3}{2}$ lub $\log_b a = \frac{1}{3}$.
2. Jeśli zdający pominie kwadrat w wyrażeniu $\log_{a^2 b} N$ i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, otrzymując odpowiedź: $\log_a b = \frac{19}{3}$, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeśli zdający korzysta w rozwiązaniu z fałszywych równości, np. $\log_{a^2 b} N = \frac{1}{2}\log_{ab} N$, to otrzymuje **0 punktów**, chyba że wcześniej nabył praw do 1 punktu.

## Zadanie 11. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru $m$, dla których nierówność

$$\left(m^2+4m-5\right)\cdot x^2+2x>2mx-2$$

jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x$.

**Rozwiązanie**

Zapiszemy nierówność w następującej postaci

$$\left(m^2+4m-5\right)\cdot x^2+2x(1-m)+2>0$$

Zauważamy, że $m^2+4m-5=(m-1)(m+5)$. Wynika stąd, że należy rozważyć dwie sytuacje:

- nierówność liniowa
  1) Jeśli $m=1$, to otrzymujemy nierówność $2>0$, która jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x$.
  2) Jeśli $m=-5$, to otrzymujemy nierówność $12x+2>0$, która jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x>-\frac{1}{6}$.
- nierówność kwadratowa
  3) Jeśli $m\neq 1$ i $m\neq -5$, to należy sprawdzić, kiedy zachodzą jednocześnie dwie nierówności:

$$a>0 \text{ i } \Delta<0,$$

gdzie $a=(m-1)(m+5)$ jest współczynnikiem trójmianu $\left(m^2+4m-5\right)\cdot x^2+2x(1-m)+2$ przy najwyższej potędze zmiennej $x$, zaś $\Delta=b^2-4ac$ jest wyróżnikiem tego trójmianu. Zapisujemy kolejno:

$$(m-1)(m+5)>0 \Leftrightarrow m<-5 \text{ lub } m>1.$$

$$\Delta=4(1-m)^2-4(m-1)(m+5)\cdot 2=4(m-1)^2-8(m-1)(m+5)=-4(m-1)(m+11)$$

$$-4(m-1)(m+11)<0 \Leftrightarrow m<-11 \text{ lub } m>1.$$

Zatem nierówności $a>0$ i $\Delta<0$ zachodzą jednocześnie dla $m<-11$ lub $m>1$.

Łącząc wyniki z punktów 1) i 3), otrzymujemy odpowiedź ostateczną: $m<-11$ lub $m\geq 1$.

**Schemat punktowania**

Składa się on z dwóch części.

**Pierwsza**, to rozpatrzenie przypadku nierówności liniowej. Zdający może za tę część otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

**Druga**, to rozpatrzenie przypadku nierówności kwadratowej. Zdający może za tę część otrzymać maksymalnie 3 **punkty**.

**Schemat punktowania części pierwszej**

**1 punkt** przyznajemy zdającemu, który zauważy i zapisze, że dla $m=1$ albo dla $m=-5$ podana nierówność jest liniowa i poprawnie zbada jeden z tych przypadków.

**2 punkty** przyznajemy zdającemu, który poprawnie określi, że dla $m=1$ nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x$, zaś dla $m=-5$ tak nie jest.

**Schemat punktowania części drugiej**
**1 punkt** przyznajemy zdającemu, który zapisze, że nierówność kwadratowa jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x$ wtedy, gdy parametr $m$ spełnia układ nierówności

$$m^2+4m-5>0 \text{ i } \Delta<0$$

**albo**

$$m^2+4m-5>0 \text{ i } y_W>0, \text{ gdzie } y_W=-\frac{\Delta}{4a}$$

**2 punkty** przyznajemy zdającemu, który poprawnie rozwiąże jedną z dwóch nierówności

$$m^2+4m-5>0, \text{ czyli } (m-1)(m+5)>0 \Leftrightarrow m<-5 \text{ lub } m>1$$

lub

$$\Delta=-4(m-1)(m+11)<0$$

$$-4(m-1)(m+11)<0 \Leftrightarrow m<-11 \text{ lub } m>1$$

**3 punkty** przyznajemy zdającemu, który poprawnie rozwiąże obie nierówności $a>0$ i $\Delta<0$

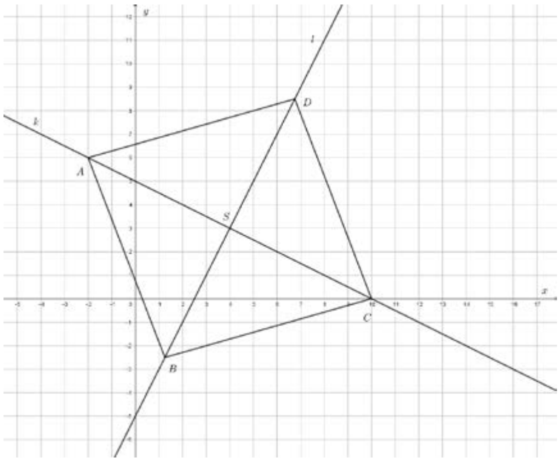
**oraz**

zapisze końcową odpowiedź do zadania: Dla $m<-11$ lub $m\geq 1$ podana nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x$.

**Uwagi:**
1. Jeśli zdający w części drugiej rozwiązania zapisze jedynie nierówność $\Delta<0$ i nawet bezbłędnie tę nierówność rozwiąże, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający zapisze w drugiej części rozwiązania układ nierówności $m^2+4m-5\neq 0$ i $\Delta<0$,
   a następnie konsekwentnie rozwiąże ten układ do końca, to za drugą część rozwiązania może otrzymać maksymalnie **1 punkt**.
3. Jeśli zdający w części drugiej rozwiązania zapisze układ nierówności $m^2+4m-5>0$ i $\Delta>0$,
   a następnie nawet bezbłędnie ten układ rozwiąże, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.
   Jeśli zdający zapisze w części drugiej rozwiązania układ nierówności $m^2+4m-5>0$ i $\Delta\leq 0$,
   i konsekwentnie rozwiąże tę część do końca, to za tę część może otrzymać maksymalnie
   **2 punkty**.

**Zadanie 12. (0–6)**

Punkt $A=(-2,6)$ jest wierzchołkiem rombu *ABCD* o polu 82,5. Przekątna *BD* zawiera się w prostej *l* o równaniu $2x-y-5=0$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.




**Rozwiązanie (I sposób)**

Wyznaczamy równanie prostej *k* zawierającej przekątną *AC* rombu (prosta *k* jest prostopadła do prostej *l*, punkt *A* leży na prostej *k*.

$k: y=-\frac{1}{2}x+5$

Z układu równań $\begin{cases} y=2x-5 \\ y=-\frac{1}{2}x+5 \end{cases}$ wyznaczamy współrzędne punktu $S=(4,3)$ (środek symetrii rombu). Punkt *S* jest jednocześnie środkiem przekątnej *AC*, co pozwala obliczyć współrzędne wierzchołka $C=(10,0)$.

Obliczamy długość przekątnej $|AC|=6\sqrt{5}$ , a następnie, wykorzystując informację o polu rombu, obliczamy długość drugiej przekątnej.

$\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=82,5$

$\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{5}\cdot|BD|=82,5$

$|BD|=\frac{11}{2}\sqrt{5}$

Punkty *B* oraz *D* leżą na okręgu o środku $S=(4,3)$ i promieniu $\frac{1}{2}|BD|=\frac{11}{4}\sqrt{5}$ oraz na prostej *l*. Wyznaczamy ich współrzędne rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} (x-4)^2+(y-3)^2=\frac{121}{16}\cdot 5 \\ y=2x-5 \end{cases}$$

Otrzymujemy punkty $B=\left(\frac{5}{4},-\frac{5}{2}\right)$ oraz $D=\left(\frac{27}{4},\frac{17}{2}\right)$.

**Uwaga**
Długość odcinka *AS* można obliczyć również jako odległość punktu *A* od prostej *l*.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**
gdy
- wyznaczy równanie prostej
  $k: y=-\frac{1}{2}x+5$

albo
- wyznaczy $|AS|=3\sqrt{5}$, jako odległość punktu *A* od prostej *l* .

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 2 p.**
gdy
- wyznaczy równanie prostej $k: y=-\frac{1}{2}x+5$ oraz obliczy współrzędne punktów
  $S=(4,3)$ oraz $C=(10,0)$

albo
- wyznaczy $|AS|=3\sqrt{5}$ , jako odległość punktu *A* od prostej *l* oraz obliczy długości przekątnych $|AC|=6\sqrt{5}$ oraz $|BD|=\frac{11}{2}\sqrt{5}$ .

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 3 p.**

gdy wyznaczy równanie prostej $k: y=-\frac{1}{2}x+5$ oraz obliczy współrzędne punktów $S=(4,3)$ oraz $C=(10,0)$ i długość przekątnej $|BD|=\frac{11}{2}\sqrt{5}$ .

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 4 p.**

gdy zapisze układ równań wystarczający do obliczenia współrzędnych punktów *B* oraz *D*,

np. $\begin{cases} (x-4)^2+(y-3)^2=\frac{121}{16}\cdot 5 \\ y=2x-5 \end{cases}$

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 5 p.**

gdy rozwiąże zadanie do końca, popełniając błąd rachunkowy.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 6 p.**

gdy poprawnie rozwiąże układ równań i poda bezbłędnie odpowiedź

$B=\left(\frac{5}{4},-\frac{5}{2}\right), C=(10,0),\ D=\left(\frac{27}{4},\frac{17}{2}\right)$.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Wyznaczamy równanie prostej $k: y=-\frac{1}{2}x+5$ oraz obliczamy współrzędne punktu $C=(10,0)$ (jak w sposobie I). Zauważamy, że pole trójkąta *ABC* jest połową pola rombu *ABCD* i wynosi $41\frac{1}{4}$. Wyznaczamy pole trójkąta *ABC* w zależności od współrzędnych punktu

$B=(x_B, y_B)$

$P_{\Delta ABC}=\left|-6y_B-3x_B+30\right|$

Punkt *B* leży na prostej *l*, więc jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.
Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases}\left|-6y_B-3x_B+30\right|=41\frac{1}{4}\\ y_B=2x_B-5\end{cases}$$

Rozwiązaniami układu są dwie pary liczb $\left(\frac{5}{4},-\frac{5}{2}\right)$ oraz $\left(\frac{27}{4},\frac{17}{2}\right)$. Zauważamy, że takie same warunki spełnia punkt *D* (pole trójkąta *ABD* jest połową pola rombu oraz punkt *D* leży na prostej *l*. Wyciągamy wniosek, że otrzymane pary liczb to współrzędne wierzchołków *B* oraz *D*.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **1 p.**
gdy wyznaczy równanie prostej
$k: y=-\frac{1}{2}x+5$

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **2 p.**
gdy
wyznaczy równanie prostej $k: y=-\frac{1}{2}x+5$ oraz obliczy współrzędne punktów $S=(4,3)$ i $C=(10,0)$.

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **3 p.**
gdy zauważy, że pole trójkąta *ABC* jest połową pola rombu *ABCD* i wynosi $41\frac{1}{4}$ i zapisze równanie $\left|-6y_B-3x_B+30\right|=41\frac{1}{4}$

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **4 p.**
gdy zapisze układ równań wystarczający do obliczenia współrzędnych punktów *B* oraz *D*

$$\begin{cases}\left|-6y_B-3x_B+30\right|=41\frac{1}{4}\\ y_B=2x_B-5\end{cases}$$

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **5 p.**
gdy rozwiąże zadanie do końca, popełniając błąd rachunkowy.

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **6 p.**
gdy poprawnie rozwiąże układ równań i poda bezbłędnie odpowiedź

$B=\left(1\frac{1}{4},-2\frac{1}{2}\right), C=(10,0),\ D=\left(6\frac{3}{4},8\frac{1}{2}\right)$.

**Rozwiązanie (III sposób)**

Przyjmijmy oznaczenie współrzędnych punktu $C=(x_C,y_C)$. Wyznaczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{AC}=[x_C+2,y_c-6]$.
Wektor $\overrightarrow{AC}$ jest prostopadły do prostej $2x-y-5=0$ Istnieje zatem $p\in\mathbb{R}$, dla którego
$\overrightarrow{AC}=[2p,-p]$
Obliczamy długość wektora $\overrightarrow{AC}$ jako podwojoną odległość punktu *A* od prostej *l*.
$\overrightarrow{AC}=6\sqrt{5}$
Wtedy $\sqrt{(2p)^2+(-p)^2}=6\sqrt{5}$ stąd $p=6$ lub $p=-6$.
Zatem
$[x_C+2,y_C-6]=[12,-6]$ lub $[x_C+2,y_C-6]=[-12,6]$
$C_1=(10,0),\quad C_2=(-14,12)$

Odrzucamy drugie rozwiązanie (np. na podstawie obserwacji, że środek odcinka $AC_2$ nie leży na prostej *l*. Dalej postępujemy, jak w I lub II sposobie.

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**

gdy zapisze $\overrightarrow{AC}=[2p,-p]$, $\overrightarrow{AC}=[x_C+2, y_c-6]$ oraz obliczy $\overrightarrow{AC}=6\sqrt{5}$.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 2 p.**

gdy rozwiąże równanie $\sqrt{(2p)^2+(-p)^2}=6\sqrt{5}$, wyznaczy współrzędne punktu $C_1=(10,0)$ i uzasadni odrzucenie drugiego rozwiązania.

Dalszą część rozwiązania oceniamy jak w sposobie I lub II.

## Zadanie 13. (0–3)

Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że w zapisie dziesiętnym iloczyn wszystkich cyfr każdej z tych liczb jest równy 28.

**Rozwiązanie**

Zauważamy, że naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28 może być zbudowana z dwóch zestawów cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka lub cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka.

Obliczamy ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych zbudowanych z cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka.

Cyfrę 7 możemy zapisać na jednym z siedmiu miejsc, cyfrę 4 na jednym z sześciu miejsc, a pozostałe pięć miejsc wypełnią jedynki.

Stosujemy regułę mnożenia: $7\cdot 6\cdot 1=42$.

Obliczamy ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych zbudowanych z cyfr: cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka. Wybieramy najpierw miejsce dla cyfry 7, następnie dwa miejsca dla dwóch cyfr 2, a pozostałe miejsca wypełnią jedynki.

Stosujemy kolejny raz regułę mnożenia: $7\cdot\binom{6}{2}\cdot 1=7\cdot 15\cdot 1=105$.

Teraz stosujemy regułę dodawania: $42+105=147$.

Jest 147 siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**

gdy zapisze że naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28 może być zbudowana z dwóch zestawów cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka lub cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 2 p.**

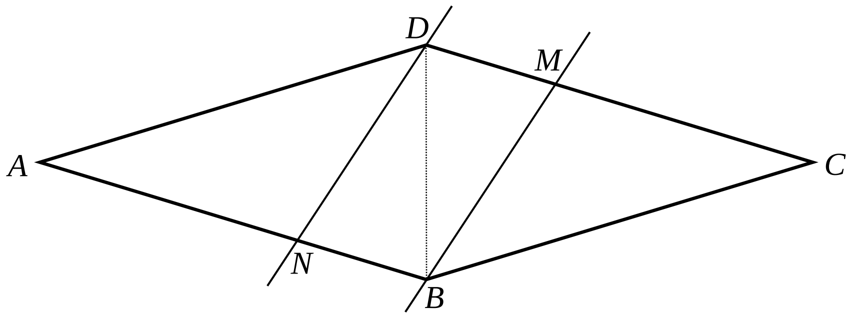
gdy obliczy ile jest liczb siedmiocyfrowych zbudowanych z cyfr: cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka lub zbudowanych z cyfr: cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka: odpowiednio 42 i 105.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 3 p.**

gdy obliczy, że jest 147 siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28.

**Zadanie 14. (0–6)**

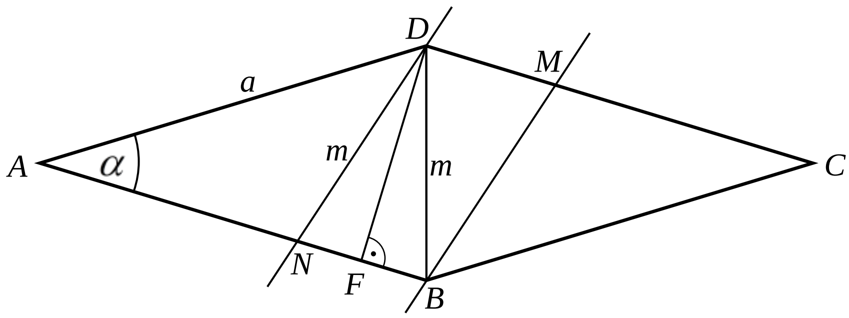
Dany jest romb *ABCD*. Przez wierzchołki *B* i *D* poprowadzono dwie proste równoległe przecinające boki *CD* i *AB* – odpowiednio – w punktach *M* i *N*, tak, że podzieliły one ten romb na trzy figury *AND*, *NBMD*, *BCM* o równych polach oraz $|MB| = |ND| = |BD|$ (zobacz rysunek). Oblicz cosinus kąta ostrego tego rombu.




**Przykładowe sposoby rozwiązania zadania**

**I sposób**

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.




Przekątna *BD* dzieli romb *ABCD* na dwa trójkąty o równych polach, a jednocześnie dzieli równoległobok *BMDN* na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku jest równe polu trójkąta *AND*, więc pole trójkąta *AND* jest dwa razy większe od pola trójkąta *BDN*. Trójkąty *AND* i *BDN* mają tę samą wysokość opuszczoną z wierzchołka *D*, więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości ich podstaw, czyli

$$|AN| = 2|NB|.$$

Zatem $|NB| = \frac{a}{3}$.

Trójkąt *NBD* jest równoramienny, więc spodek *F* jego wysokości *DF* jest środkiem podstawy *NB* . Stąd wynika, że $|FB| = \frac{a}{6}$, więc $|AF| = a - \frac{a}{6} = \frac{5}{6}a$.

Z trójkąta prostokątnego *AFD* otrzymujemy

$$\cos\alpha = \frac{|AF|}{|AD|} = \frac{\frac{5}{6}a}{a} = \frac{5}{6}.$$

**Schemat punktowania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ........................................................................................1 pkt**

Zdający

- zapisze, że stosunek pól trójkątów *AND* i *BDN* jest równy stosunkowi długości ich podstaw zawartych w prostej *AB*

albo

- zaznaczy wysokość *DF* trójkąta *NBD* i zapisze, że odcinki *NF* i *FB* są równe

albo

- zapisze układ równań pozwalający wyznaczyć długość odcinka *AN* (lub *NB*) w zależności od długości boku rombu: $P_{ABCD} = a^2 \sin\alpha$ i $P_{AND} = \frac{1}{2}ax\sin\alpha$ i $P_{AND} = \frac{1}{3}P_{ABCD}$, gdzie $x = |AN|$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..................................................................2 pkt**

Zdający wyznaczy długość odcinka *AN* (lub *NB*) w zależności od długości boku rombu: $|AN| = \frac{2}{3}a$ ($|NB| = \frac{1}{3}a$ ).

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .................................................................3 pkt**

Zdający wyznaczy długość odcinka *FB* w zależności od długości boku rombu lub wykorzysta definicję cosinusa w trójkącie prostokątnym *AFD*: $|FB| = \frac{1}{6}a$ lub $\cos\alpha = \frac{|AF|}{|AD|}$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .................................................................4 pkt**

Zdający wyznaczy długość odcinka *FB* w zależności od długości boku rombu i wykorzysta definicję cosinusa w trójkącie prostokątnym *AFD*: $|FB| = \frac{1}{6}a$ i $\cos\alpha = \frac{|AF|}{|AD|}$.

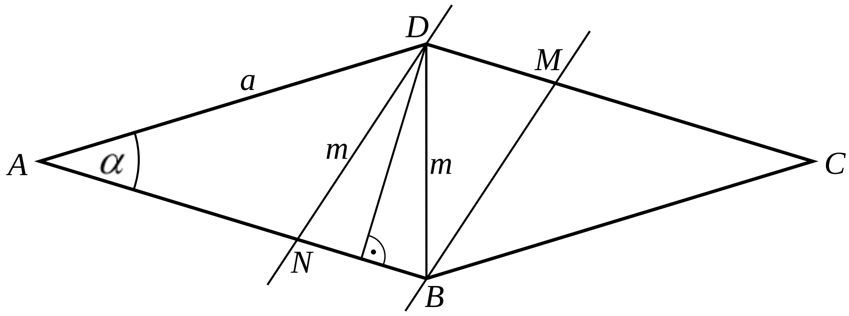
**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ........................................................5 pkt**

**Rozwiązanie pełne .........................................................................................................6 pkt**

Zdający obliczy $\cos\alpha$ : $\cos\alpha = \frac{5}{6}$ .

**II sposób**

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.




Przekątna *BD* dzieli romb *ABCD* na dwa trójkąty o równych polach, a jednocześnie dzieli równoległobok *BMDN* na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku jest równe polu trójkąta *AND*, więc pole trójkąta *AND* jest dwa razy większe od pola trójkąta *BDN*. Trójkąty *AND* i *BDN* mają tę samą wysokość opuszczoną z wierzchołka *D*, więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości ich podstaw, czyli

$$|AN| = 2|NB|.$$

Zatem $|AN| = \frac{2}{3}a$ .

Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów *ABD* i *AND* otrzymujemy

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB|\cdot|AD|\cos\alpha \text{ oraz } |ND|^2 = |AN|^2 + |AD|^2 - 2|AN|\cdot|AD|\cos\alpha ,$$

czyli

$$m^2 = a^2 + a^2 - 2a\cdot a\cos\alpha \text{ oraz } m^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + a^2 - 2\cdot\frac{2}{3}a\cdot a\cos\alpha ,$$

$$m^2 = a^2\left(2 - 2\cos\alpha\right) \text{ oraz } m^2 = a^2\left(\frac{13}{9} - \frac{4}{3}\cos\alpha\right).$$

Stąd

$$a^2\left(2 - 2\cos\alpha\right) = a^2\left(\frac{13}{9} - \frac{4}{3}\cos\alpha\right),$$

$$2 - 2\cos\alpha = \frac{13}{9} - \frac{4}{3}\cos\alpha ,$$

$$\frac{2}{3}\cos\alpha = \frac{5}{9},$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{6}.$$

**Uwaga**

Obliczenie, jaką częścią boku rombu jest odcinek *AN*, możemy też wykonać, korzystając ze wzoru na pole trójkąta $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Niech $|AN|=x$. Wtedy pole rombu *ABCD* jest równe

$$P_{ABCD}=a^2\sin\alpha,$$

a pole trójkąta *AND* jest równe

$$P_{AND}=\frac{1}{2}ax\sin\alpha.$$

Pole trójkąta *AND* to jedna trzecia pola rombu, więc

$$\frac{1}{2}ax\sin\alpha=\frac{1}{3}a^2\sin\alpha.$$

Stąd

$$x=\frac{2}{3}a.$$

**Schemat punktowania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ........................................................................................1 pkt**

Zdający

- zapisze, że stosunek pól trójkątów *AND* i *BDN* jest równy stosunkowi długości ich podstaw zawartych w prostej *AB*

albo

- zapisze dwa równania wynikające z twierdzenia cosinusów dla trójkątów *ABD* i *AND*: $m^2=a^2+a^2-2a\cdot a\cos\alpha$, $m^2=x^2+a^2-2\cdot x\cdot a\cos\alpha$, gdzie $x=|AN|$

albo

- zapisze układ równań pozwalający wyznaczyć długość odcinka *AN* w zależności od długości boku rombu: $P_{ABCD}=a^2\sin\alpha$ i $P_{AND}=\frac{1}{2}ax\sin\alpha$ i $P_{AND}=\frac{1}{3}P_{ABCD}$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..................................................................2 pkt**

Zdający wyznaczy długość odcinka *AN* (lub *NB*) w zależności od długości boku rombu: $|AN|=\frac{2}{3}a$ ($|NB|=\frac{1}{3}a$).

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..................................................................3 pkt**

Zdający zapisze jedno z równań, które pozwala obliczyć cosinus kąta ostrego rombu:
$m^2=a^2\left(2-2\cos\alpha\right)$ lub $m^2=a^2\left(\frac{13}{9}-\frac{4}{3}\cos\alpha\right)$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..................................................................4 pkt**

Zdający zapisze układ równań, pozwalający obliczyć cosinus kąta ostrego rombu:
$m^2=a^2\left(2-2\cos\alpha\right)$ oraz $m^2=a^2\left(\frac{13}{9}-\frac{4}{3}\cos\alpha\right)$.

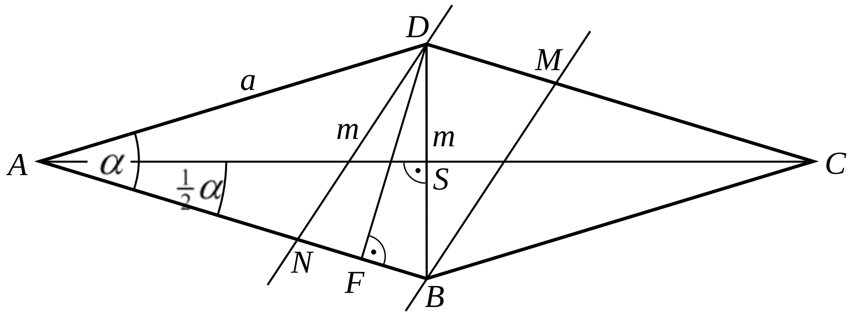
**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .......................................................5 pkt**

**Rozwiązanie pełne ..........................................................................................................6 pkt**

Zdający obliczy $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{5}{6}$.

**III sposób**

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.




Przekątna $BD$ dzieli równoległobok $BMDN$ na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku to jedna trzecia pola rombu, więc pole trójkąta $NBD$ jest szóstą częścią pola rombu. Trójkąt $NBD$ jest równoramienny, więc jego wysokość $DF$ dzieli go na dwa trójkąty przystające. Zatem pole trójkąta $FBD$ jest dwunastą częścią pola rombu.

Przekątne rombu dzielą go na cztery trójkąty przystające, więc pole trójkąta $SBA$ jest czwartą częścią pola rombu.

Zauważmy teraz, że trójkąty $FBD$ i $SBA$ są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku $B$. Skala $s$ tego podobieństwa jest równa

$$s = \frac{|DB|}{|AB|} = \frac{m}{a}.$$

Kwadrat skali tego podobieństwa jest równy stosunkowi pól tych trójkątów, czyli

$$s^2 = \frac{P_{FBD}}{P_{SBA}} = \frac{\frac{1}{12}P_{ABCD}}{\frac{1}{4}P_{ABCD}} = \frac{1}{3}.$$

Zatem

$$\left(\frac{m}{a}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

$$m^2 = \frac{1}{3}a^2.$$

Stąd $m = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Z trójkąta $SBA$ otrzymujemy

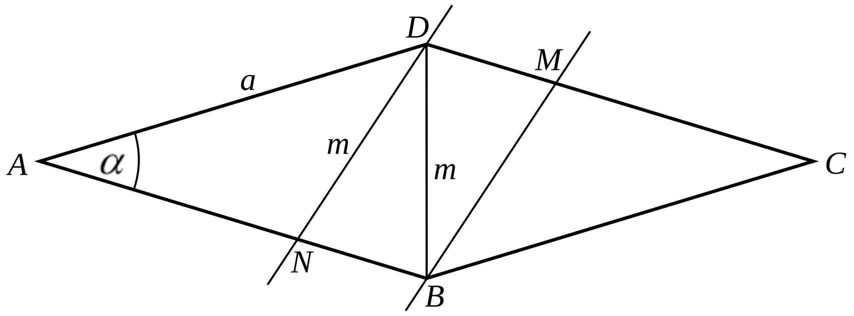
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}m}{a} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}}{a} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Ze wzoru na cosinus podwojonego kąta mamy więc

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 1 - \frac{2}{12} = \frac{5}{6}.$$

**IV sposób**

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.




Przekątna *BD* dzieli równoległobok *BMDN* na dwa trójkąty o równych polach oraz romb *ABCD* na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku to jedna trzecia pola rombu, więc pole trójkąta *NBD* jest trzecią częścią pola trójkąta *BDA*. Trójkąty *NBD* i *BDA* są równoramienne i mają ten sam kąt przy wierzchołku *B* , a jest to kąt przy podstawie każdego z tych trójkątów, więc trójkąty te są podobne. Skala *s* tego podobieństwa jest równa

$$s = \frac{|DB|}{|AB|} = \frac{m}{a}.$$

Kwadrat skali tego podobieństwa jest równy stosunkowi pól tych trójkątów, czyli

$$s^2 = \frac{P_{NBD}}{P_{BDA}} = \frac{\frac{1}{3}P_{BDA}}{P_{BDA}} = \frac{1}{3}.$$

Zatem

$$\left(\frac{m}{a}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

$$m^2 = \frac{1}{3}a^2.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta *BDA* otrzymujemy

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB|\cdot|AD|\cos\alpha ,$$

czyli

$$m^2 = a^2 + a^2 - 2a\cdot a\cos\alpha ,$$

$$\frac{1}{3}a^2 = a^2\left(2-2\cos\alpha\right) ,$$

$$\frac{1}{3} = 2-2\cos\alpha ,$$

$$2\cos\alpha = \frac{5}{3},$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{6}.$$

**Schemat punktowania III i IV sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ............................................................................................................1 pkt**

Zdający
- zapisze, że pole trójkąta *FBD* jest dwunastą częścią pola rombu *ABCD*

albo
- zapisze, że pole trójkąta *SBA* jest czwartą częścią pola rombu *ABCD*

albo
- zapisze, że pole trójkąta *NBD* jest trzecią częścią pola trójkąta *BDA*.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..........................................................................2 pkt**

Zdający
- zapisze, że trójkąty *FBD* i *SBA* są podobne i $P_{FBD} = \frac{1}{12} P_{ABCD}$, i $P_{SBA} = \frac{1}{4} P_{ABCD}$

albo
- zapisze, że trójkąty *NBD* i *BDA* są podobne i $P_{NBD} = \frac{1}{3} P_{BDA}$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..........................................................................3 pkt**

Zdający
- zapisze układ równań z niewiadomymi *m, a,* $\cos\alpha$, np.:

$m^2 = \frac{1}{3} a^2$ i $m^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos\alpha$

lub
- obliczy wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej kąta $\frac{\alpha}{2}$, np.: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..........................................................................4 pkt**

Zdający
- zapisze układ równań z niewiadomymi *m, a,* $\cos\alpha$, np.:

$m^2 = \frac{1}{3} a^2$ i $m^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos\alpha$

oraz
- obliczy wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej kąta $\frac{\alpha}{2}$, np.: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..........................................................5 pkt**

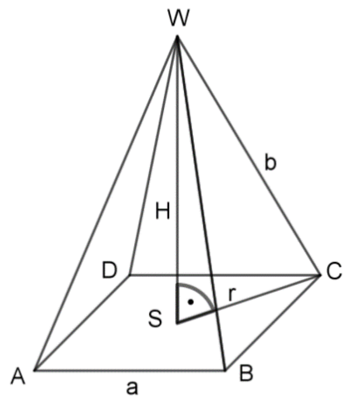
**Rozwiązanie pełne ..................................................................................................................6 pkt**

Zdający obliczy $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{5}{6}$.

**Zadanie 15. (0–7)**

Rozpatrujemy wszystkie ostrosłupy prawidłowe czworokątne, w których suma promienia okręgu opisanego na podstawie i długości krawędzi bocznej jest równa $d$. Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozpatrywanych ostrosłupów, który ma największą objętość. Oblicz tę objętość.

**Rozwiązanie (I sposób)**




Wprowadzamy oznaczenia: $r$ – promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa,
$b$ – krawędź boczna, $a$ – krawędź podstawy, $H$ – wysokość ostrosłupa.

Z zależności $r+b=d$ wyznaczamy $b=d-r$. W trójkącie $SCW$ stosujemy tw. Pitagorasa:
$$H^2=b^2-r^2=(b-r)(b+r)=d(b-r)=d(d-r-r)=d(d-2r)$$
skąd wyznaczamy $H=\sqrt{d(d-2r)}$.

Zauważamy, że $r>0$ oraz $d-2r>0$, czyli $r\in\left(0,\frac{d}{2}\right)$.

Wyznaczamy $a$ w zależności od $r$: $a=r\sqrt{2}$ i zapisujemy objętość ostrosłupa w zależności od zmiennej $r$.
$$V(r)=\frac{1}{3}r^2\cdot 2\sqrt{d^2-2dr}=\frac{2}{3}\sqrt{r^4d^2-2r^5d} \text{ dla } r\in\left(0,\frac{d}{2}\right).$$

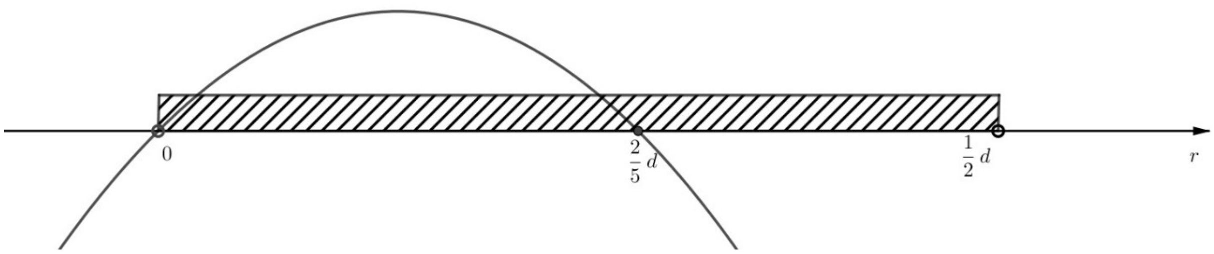
Rozważamy funkcję pomocniczą $f(r)=r^4d^2-2r^5d$, której dziedziną jest przedział $\left(0,\frac{d}{2}\right)$.

Aby znaleźć maksimum lokalne tej funkcji, wyznaczamy jej pochodną
$$f'(r)=4r^3d^2-10r^4d=2r^3d(2d-5r)$$

Jedynym miejscem zerowym z przedziału $\left(0,\frac{d}{2}\right)$ jest $r=\frac{2}{5}d$

($r=0$ nie należy do dziedziny funkcji $f$).

Analizujemy monotoniczność funkcji *f* (np. na podstawie wykresu znaku pochodnej):




$f'(r) > 0$ dla $r \in \left(0, \frac{2}{5}d\right)$ (funkcja w tym przedziale rośnie),

$f'(r) < 0$ dla $r \in \left(\frac{2}{5}d, \frac{1}{2}d\right)$ (funkcja w tym przedziale maleje).

Wnioskujemy, że funkcja osiąga maksimum lokalne dla $r = \frac{2}{5}d$. Z analizy monotoniczności funkcji w dziedzinie wynika, że jest to jednocześnie największa wartość funkcji w dziedzinie.

Ponieważ funkcja $g(x) = \sqrt{x}$ jest funkcją rosnącą, funkcja *V* oraz funkcja *f* są rosnące i malejące w tych samych przedziałach i przyjmują maksimum lokalne dla tego samego argumentu.

Wobec tego, ostrosłup ma największą objętość dla $r = \frac{2}{5}d$, czyli dla $a = \frac{2\sqrt{2}}{5}d$. Wysokość tego ostrosłupa jest równa $H = \sqrt{d\left(d - \frac{4}{5}d\right)} = \frac{\sqrt{5}}{5}d$. Szukana objętość jest równa

$V = \frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$.

**Odp.** Największą objętość ma ostrosłup o krawędzi podstawy $a = \frac{2\sqrt{2}}{5}d$, objętość ta jest równa $V = \frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$.

**Schemat oceniania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

a) wyznaczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa oraz wysokości w zależności od długości promienia okręgu opisanego na podstawie

b) zapisanie objętości ostrosłupa jako funkcji zmiennej *r*: $V(r) = \frac{2}{3}\sqrt{r^4d^2 - 2r^5d}$,

c) określenie dziedziny funkcji *V*: $r \in \left(0, \frac{d}{2}\right)$.

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie.**

Drugi etap składa się z trzech części:

a) wprowadzenie funkcji pomocniczej $f\left(r\right)=r^4d^2-2r^5d$ i wyznaczenie pochodnej $f'\left(r\right)=4r^3d^2-10r^4d=24r^3d\left(2d-5r\right)$

b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej $r=\frac{2}{5}d$,

c) uzasadnienie, że dla $r=\frac{2}{5}d$ funkcja $f$ osiąga największą wartość oraz że dla takiej wartości promienia objętość ostrosłupa jest największa.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

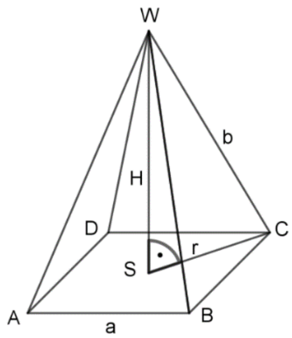
**Uwaga**
Jeżeli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji *V*, to nie może otrzymać punktu za ostatnią część etapu drugiego (uzasadnienie).

- Trzeci etap.

Obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa o największej objętości:
$a=\frac{2\sqrt{2}}{5}d$. Wyznaczenie największej objętości ostrosłupa: $V=\frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Rozwiązanie (II sposób)**




Wprowadzamy oznaczenia, jak w I sposobie.
Z zależności $r+b=d$ wyznaczamy $b=d-r$. W trójkącie *SCW* stosujemy tw. Pitagorasa:

$$H^2=d\left(d-2r\right)/:d \quad \left(d\neq 0\right)$$

$$\frac{H^2}{d}=d-2r$$

$$r=\frac{1}{2}\left(d-\frac{H^2}{d}\right)=\frac{1}{2d}\left(d^2-H^2\right)$$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa $P_P=\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot 2r=2r^2$ oraz objętość

$$V=\frac{1}{3}\cdot 2r^2H=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4d^2}\left(d^2-H^2\right)^2\cdot H$$

$$V\left(H\right)=\frac{1}{6d^2}\left(d^4H-2d^2H^3+H^5\right)$$

Z warunków geometrycznych $H>0$ i $H<r+b$ (nierówność trójkąta w trójkącie *SWC*) wyznaczamy dziedzinę funkcji *V*:

$H \in (0, d)$

Aby znaleźć maksimum lokalne tej funkcji, wyznaczamy jej pochodną

$V'(H) = \frac{1}{6d^2}\left(5H^4 - 6d^2H^2 + d^4\right)$

Obliczamy miejsca zerowe i analizujemy znak pochodnej

$V'(H) = 0 \Leftrightarrow 5H^4 - 6d^2H^2 + d^4 = 0$

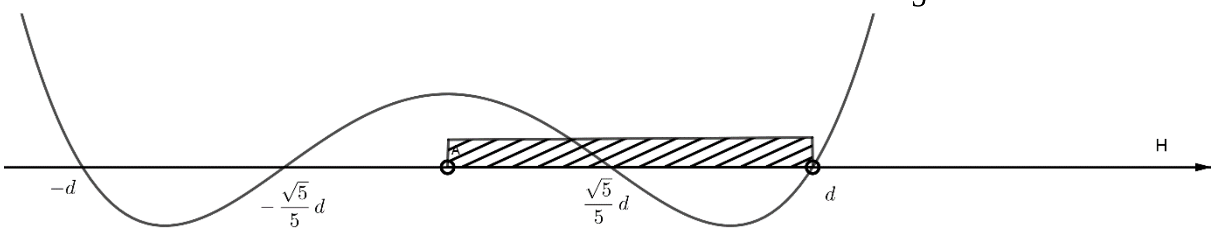
$H^2 = t$

$5t^2 - 6d^2t + d^4 = 0$

$t = \frac{1}{5}d^2 \qquad t = d^2$

$H = -\frac{\sqrt{5}}{5}d, \;\; H = \frac{\sqrt{5}}{5}d, \;\; H = -d, \;\; H = d$

Jedynym miejscem zerowym pochodnej w przedziale $(0, d)$ jest $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$.




$V'(H) > 0$ dla $H \in \left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}d\right)$ (funkcja *V* w tym przedziale rośnie),

$V'(H) < 0$ dla $H \in \left(\frac{\sqrt{5}}{5}d, d\right)$ (funkcja *V* w tym przedziale maleje).

Wnioskujemy, że funkcja *V* osiąga maksimum lokalne dla $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$. Z analizy monotoniczności funkcji *V* w dziedzinie wynika, że jest to jednocześnie największa wartość funkcji w przedziale $(0, d)$.

Ostrosłup ma największą objętość dla $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$, czyli dla $a = \frac{2\sqrt{2}}{5}d$. Największa objętość jest równa $V = \frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$.

**Schemat oceniania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

a) wyznaczenie długości promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa oraz pola podstawy w zależności od długości wysokości ostrosłupa

b) zapisanie objętości ostrosłupa jako funkcji zmiennej *H*:

$$V(H)=\frac{1}{6d^2}\left(d^4H-2d^2H^3+H^5\right)$$

c) określenie dziedziny funkcji *V*: $H\in(0,d)$.

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie.**

Drugi etap składa się z trzech części:

a) wyznaczenie pochodnej

$$V'(H)=\frac{1}{6d^2}\left(5H^4-6d^2H^2+d^4\right),$$

b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej $H=\frac{\sqrt{5}}{5}d$,

c) uzasadnienie, że dla $H=\frac{\sqrt{5}}{5}d$ objętość ostrosłupa jest największa.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

**Uwaga**

Jeżeli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji *V*, to nie może otrzymać punktu za ostatnią część etapu drugiego (uzasadnienie).

- Trzeci etap.

Obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa o największej objętości:

$a=\frac{2\sqrt{2}}{5}d$. Wyznaczenie największej objętości ostrosłupa: $V=\frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$ .

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.