CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	EMAP-P0-100, EMAP-P0-200, EMAP-P0-300, EMAP-P0-Q00
Termin egzaminu:	4 czerwca 2024 r.
Data publikacji dokumentu:	28 czerwca 2024 r.

Uwaga:
Gdy wymaganie egzaminacyjne dotyczy treści z III etapu edukacyjnego, dopisano „G”.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 1 sierpnia 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. 2022, poz.1698).

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 2. używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 1.8) wykonuje obliczenia procentowe […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 5. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 1.8) […] oblicza […] zysk z lokat […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 6. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.3) rozwiązuje nierówności stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 7. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G7.6) rozwiązuje układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 8. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.7) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 9. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: G8.1) zaznacza w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty o danych współrzędnych. 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji ([…] miejsca zerowe, […] wartość największą lub najmniejszą).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 10. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 11. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji ([…] wartość największą […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 12. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji ([…] maksymalne przedziały, w których funkcja maleje […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 13. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$ […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 14. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.8) szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 15. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 16. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 17. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu arytmetycznego; 5.4) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 18. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.3) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 19. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 20. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 21. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.2) bada równoległość […] prostych na podstawie ich równań kierunkowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 22. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.7) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych ([…] prostej […]) w […] symetrii środkowej względem początku układu.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 23. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G11.2) oblicza […] objętość graniastosłupa prostego […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 24. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 9.3) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 25. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G11.1) rozpoznaje […] ostrosłupy prawidłowe. 10.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 26. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G11.2) oblicza pole powierzchni […] ostrosłupa.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 27. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G9.3) wyznacza średnią arytmetyczną […] zestawu danych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 28. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.1) […] stosuje regułę mnożenia […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 29. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

ZADANIA OTWARTE

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 30. (0–2)

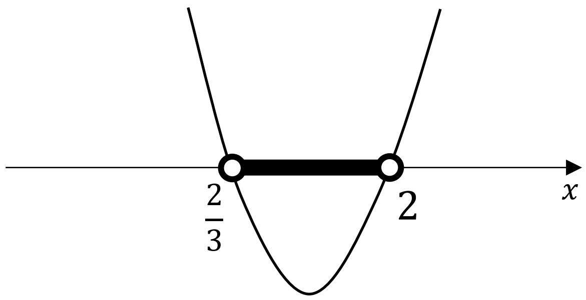
Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania

2 pkt – spełnienie jednego z warunków określonych w zasadach oceniania za 1 pkt **oraz** zapisanie zbioru rozwiązań nierówności: $\left(\frac{2}{3},2\right)$ lub $x\in\left(\frac{2}{3},2\right)$

ALBO

– spełnienie jednego z warunków określonych w zasadach oceniania za 1 pkt **oraz** przedstawienie zbioru rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



1 pkt – obliczenie lub podanie pierwiastków trójmianu kwadratowego $3x^2-8x+4$:

$x_1=\frac{2}{3}$ oraz $x_2=2$

ALBO

– odczytanie z wykresu funkcji $f(x)=3x^2-8x+4$ i zapisanie miejsc zerowych $x_1=\frac{2}{3}$ oraz $x_2=2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, realizując pierwszy etap rozwiązania zadania, popełni błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionych błędów zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający, rozpoczynając realizację pierwszego etapu rozwiązania, rozpatruje inny niż podany w zadaniu trójmian kwadratowy, który nie wynika z błędu przekształcenia (np. $3x^2 - x + 4$), i w konsekwencji rozpatruje inną nierówność (np. $3x^2 - x + 4 < 0$), to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

4. Akceptowane jest zapisanie pierwiastków trójmianu w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.

5. Jeżeli zdający poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów oraz zapisze: $x \in \langle\frac{2}{3}, 2\rangle$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $\left(2, \frac{2}{3}\right)$, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

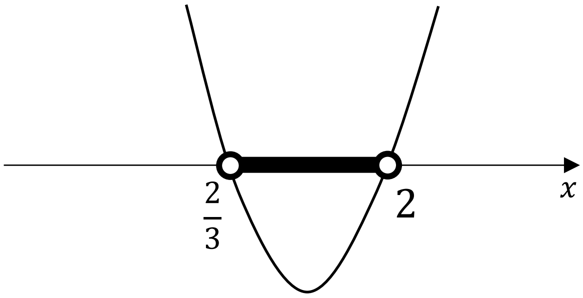
Zapisujemy nierówność w postaci $3x^2 - 8x + 4 < 0$ i obliczamy pierwiastki trójmianu $3x^2 - 8x + 4$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu: $\Delta = 16$ i obliczamy jego pierwiastki: $x_1 = \frac{2}{3}$ oraz $x_2 = 2$

ALBO

podajemy pierwiastki trójmianu bezpośrednio, zapisując je lub zaznaczając je na wykresie: $x_1 = \frac{2}{3}$ oraz $x_2 = 2$.

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ lub $x \in \left(\frac{2}{3}, 2\right)$ lub zaznaczamy zbiór rozwiązań na osi liczbowej:



Zadanie 31. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 3.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda i zapisanie wzoru funkcji f z poprawnymi wartościami współczynników, np.: $f(x) = 2(x-3)^2$, $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$.

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci kanonicznej z uwzględnieniem, że punkt N jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f: $f(x) = a(x-3)^2$

ALBO

– zapisanie wartości wyrazu wolnego funkcji f, np.: $c = 18$, $f(x) = ax^2 + bx + 18$,

ALBO

– zapisanie równania $b^2 - 4ac = 0$,

ALBO

– zapisanie równania $-\frac{b}{2a} = 3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>*Sposób I*</u>

Ponieważ punkt $N = (3, 0)$ jest jedynym punktem wspólnym wykresu funkcji f i osi Ox, więc jest to wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f.

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x-3)^2, \text{ gdzie } a \neq 0$$

Punkt $M = (0, 18)$ leży na wykresie funkcji f, zatem

$$f(0) = 18$$

$$a(0-3)^2 = 18$$

$$9a = 18$$

$$a = 2$$

Zatem $f(x) = 2(x-3)^2$.

Sposób II

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci ogólnej:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a \neq 0 \text{ oraz } b, c \in \mathbb{R}$$

Punkt $M = (0, 18)$ leży na wykresie funkcji f, zatem

$$f(0) = 18$$

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 18$$

$$c = 18$$

Ponieważ punkt $N = (3, 0)$ jest jedynym punktem wspólnym wykresu funkcji f i osi Ox, więc liczba 3 jest jedynym miejscem zerowym tej funkcji.
Stąd otrzymujemy:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \quad \text{oraz} \quad x_0 = -\frac{b}{2a} = 3$$

$$b^2 - 4a \cdot 18 = 0 \quad \text{oraz} \quad b = -6a$$

Zatem

$$(-6a)^2 - 4a \cdot 18 = 0$$

$$36a^2 - 72a = 0$$

$$36a(a - 2) = 0$$

$$a = 0 \quad \text{lub} \quad a = 2$$

Funkcja f jest kwadratowa, więc $a = 2$ i wówczas $b = -6a = -12$.
Zatem $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$.

Zadanie 32. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 2. używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania

2 pkt – przekształcenie nierówności $x^2 + 49y^2 > 2(x + 7y - 1)$ do postaci $(x - 1)^2 + (7y - 1)^2 > 0$ **oraz** powołanie się na założenie i stwierdzenie, że $(x - 1)^2$ jest liczbą dodatnią i suma $(x - 1)^2 + (7y - 1)^2$ jest liczbą dodatnią

ALBO

– obliczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego $x^2 - 2x + (49y^2 - 14y + 2)$ zmiennej x **oraz** uzasadnienie, że jest on niedodatni, oraz uzasadnienie prawdziwości nierówności $x^2 + 49y^2 > 2(x + 7y - 1)$ dla $y = \frac{1}{7}$,

ALBO

– obliczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego $49y^2 - 14y + (x^2 - 2x + 2)$ zmiennej y **oraz** uzasadnienie, że ten wyróżnik jest ujemny dla każdego $x \neq 1$,

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $f(x) > g(y)$ **oraz** poprawne uzasadnienie prawdziwości nierówności $f(x) > g(y)$ dla każdego $x \neq 1$ i $y \in \mathbb{R}$ na podstawie analizy zbiorów wartości obu funkcji.

1 pkt – przekształcenie nierówności $x^2 + 49y^2 > 2(x + 7y - 1)$ do postaci $(x - 1)^2 + (7y - 1)^2 > 0$

ALBO

– obliczenie wyróżnika Δ trójmianu kwadratowego $x^2 - 2x + (49y^2 - 14y + 2)$ zmiennej x **oraz** przekształcenie tego wyróżnika do postaci $\Delta = -(14y - 2)^2$ bądź $\Delta = -4(7y - 1)^2$ lub (zamiast przekształcenia wyróżnika) zbadanie znaku tego wyróżnika (np. obliczenie wyróżnika trójmianu $-196y^2 + 56y - 4$),

ALBO

– obliczenie wyróżnika Δ trójmianu kwadratowego $49y^2 - 14y + (x^2 - 2x + 2)$ zmiennej y **oraz** przekształcenie tego wyróżnika do postaci $\Delta = -(14x - 14)^2$ bądź $\Delta = -196(x - 1)^2$ lub (zamiast przekształcenia wyróżnika) zbadanie znaku tego wyróżnika (np. obliczenie wyróżnika trójmianu $-196x^2 + 392x - 196$),

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $f(x) > g(y)$ **oraz** zbadanie zbioru wartości jednej z funkcji: f albo g.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeśli zdający sprawdza prawdziwość nierówności tylko dla wybranych wartości x i y, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I
Przekształcamy nierówność $x^2 + 49y^2 > 2(x + 7y - 1)$ w sposób równoważny:

$$x^2 - 2x + 1 + 49y^2 - 14y + 1 > 0$$

Zauważamy, że lewą stronę nierówności można zapisać w postaci sumy dwóch kwadratów

$$(x - 1)^2 + (7y - 1)^2 > 0$$

Z założenia wiadomo, że $x \neq 1$, więc $(x - 1)^2$ jest liczbą dodatnią. Liczba $(7y - 1)^2$ jest liczbą nieujemną, zatem suma $(x - 1)^2 + (7y - 1)^2$ jest liczbą dodatnią.
To należało wykazać.

Sposób II (trójmian kwadratowy zmiennej x z parametrem y)
Przekształcamy równoważnie nierówność $x^2 + 49y^2 > 2(x + 7y - 1)$ i otrzymujemy $x^2 - 2x + 49y^2 - 14y + 2 > 0$.
Wyrażenie $x^2 - 2x + (49y^2 - 14y + 2)$ traktujemy jako trójmian kwadratowy zmiennej x.
Obliczamy wyróżnik Δ trójmianu:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (49y^2 - 14y + 2)$$

$$\Delta = 4 - 196y^2 + 56y - 8$$

$$\Delta = -196y^2 + 56y - 4$$

$$\Delta = -4(49y^2 - 14y + 1)$$

$$\Delta = -4(7y - 1)^2$$

Gdy $y \neq \frac{1}{7}$, to $\Delta < 0$ i funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - 2x + (49y^2 - 14y + 2)$ zmiennej x nie ma miejsc zerowych, a ponieważ współczynnik przy drugiej potędze zmiennej jest dodatni, więc żaden fragment wykresu funkcji f nie leży poniżej osi odciętych. Zatem funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie.

Gdy $y = \frac{1}{7}$, to $\Delta = 0$ i funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe: $x = 1$. Ponieważ współczynnik przy drugiej potędze zmiennej jest dodatni, więc żaden fragment wykresu funkcji f nie leży poniżej osi odciętych. Zatem funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla każdego $x \neq 1$.

Oznacza to, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$ i dla każdej liczby rzeczywistej y nierówność $x^2 - 2x + (49y^2 - 14y + 2) > 0$ jest prawdziwa.
Zatem nierówność $x^2 + 49y^2 > 2(x + 7y - 1)$ również jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$ i dla każdej liczby rzeczywistej y. To należało wykazać.

<u>Sposób III (poprzez analizę zbioru wartości dwóch funkcji)</u>

Przekształcamy równoważnie nierówność $x^2 + 49y^2 > 2(x + 7y - 1)$ do postaci $f(x) > g(y)$, następnie analizujemy zbiory wartości funkcji f (określonej dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$) oraz funkcji g (określonej dla każdej liczby rzeczywistej y). Takie przekształcenie równoważne nierówności można wykonać na różne sposoby, np. tak:

$$x^2 - 2x + 1 > -49y^2 + 14y - 1 \quad \text{oraz} \quad x \neq 1 \ \text{ i } \ y \in \mathbb{R}$$

Otrzymaną postać nierówności przekształcamy do postaci

$$(x-1)^2 > -(7y-1)^2 \quad \text{oraz} \quad x \neq 1 \ \text{ i } \ y \in \mathbb{R}$$

Rozważamy funkcje f i g takie, że

$$f(x) = (x-1)^2 \quad \text{dla} \quad x \neq 1 \qquad \text{oraz} \qquad g(y) = -(7y-1)^2 \quad \text{dla} \quad y \in \mathbb{R}$$

Zbiorami wartości tych funkcji są przedziały: $ZW_f = (0, +\infty)$ oraz $ZW_g = (-\infty, 0]$.
Zauważmy, że każda wartość funkcji f jest większa od każdej wartości funkcji g.
To oznacza, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$ oraz dla każdej liczby rzeczywistej y zachodzi nierówność $f(x) > g(y)$.
Zatem nierówność $x^2 + 49y^2 > 2(x + 7y - 1)$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$ i dla każdej liczby rzeczywistej y. To należało wykazać.

Zadanie 33. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: G10.7) stosuje twierdzenie Pitagorasa. 7.3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda i obliczenie długości odcinka BP: $|BP| = \frac{12\sqrt{5}}{5}$.

1 pkt – obliczenie długości odcinka AS: $|AS| = 6\sqrt{5}$

ALBO

– obliczenie sinusa lub cosinusa jednego z kątów ostrych w trójkącie ABP lub BSP,

ALBO

– zapisanie równości $|AP| = 2|BP|$,

ALBO

– zapisanie równości $|PS| = \frac{1}{2}|BP|$,

ALBO

– obliczenie długości odcinka MB (gdzie M jest rzutem prostokątnym punktu P na odcinek AB): $|MB| = \frac{12}{5}$.

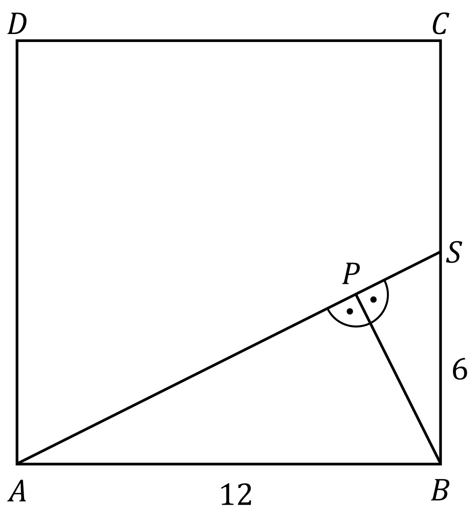
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>*Sposób I*</u>

Punkt S jest środkiem odcinka BC, więc $|BS| = 6$.

Trójkąt ABS jest prostokątny. Odcinek BP jest wysokością trójkąta ABS poprowadzoną na przeciwprostokątną AS (jak na rysunku).



Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość odcinka AS

$$|AS|^2 = 12^2 + 6^2$$
$$|AS|^2 = 180$$
$$|AS| = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

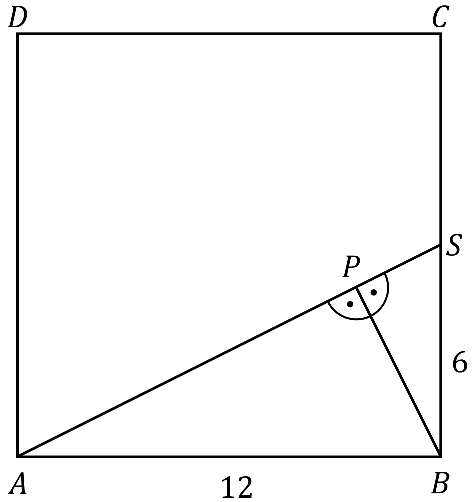
Ponieważ odcinek BP jest wysokością trójkąta prostokątnego poprowadzoną na przeciwprostokątną, więc

$$|BP| = \frac{|AB| \cdot |BS|}{|AS|} = \frac{12 \cdot 6}{6\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Długość odcinka BP jest równa $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

Sposób II

Punkt S jest środkiem odcinka BC, więc $|BS| = 6$.
Trójkąt ABS jest prostokątny. Odcinek BP jest wysokością trójkąta ABS poprowadzoną na przeciwprostokątną AS (jak na rysunku).



Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość odcinka AS

$$|AS|^2 = 12^2 + 6^2$$
$$|AS|^2 = 180$$
$$|AS| = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

Pole trójkąta ABS jest równe

$$P_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} \cdot |BP|$$

Ponadto pole trójkąta ABS można obliczyć jako połowę iloczynu długości przyprostokątnych

$$P_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36$$

Zatem

$$\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} \cdot |BP| = 36$$

$$|BP| = \frac{72}{6\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Długość odcinka BP jest równa $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

Sposób III

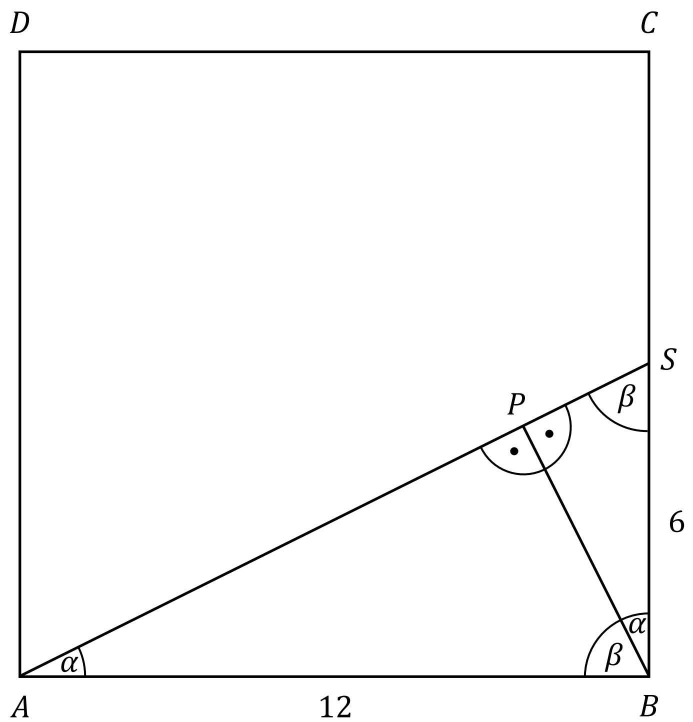
Punkt S jest środkiem odcinka BC, więc $|BS| = 6$.

Trójkąt ABS jest prostokątny. Odcinek BP jest wysokością trójkąta ABS poprowadzoną na przeciwprostokątną AS.

Z warunków zadania otrzymujemy:

- $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PBS|$
- $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle BSP|$

Zatem trójkąty ABS, APB, BPS są podobne na podstawie cechy kąt-kąt-kąt.



Oznaczmy:

$x = |PS|$

$\alpha = |\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PBS|$

$\beta = 90° - \alpha = |\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle BSP|$

Wtedy

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $|BP| = 2x$, $|AP| = 4x$, $|AS| = 5x$.

Z twierdzenia Pitagorasa (dla trójkąta ABS) obliczamy długość odcinka AS

$$|AS|^2 = 12^2 + 6^2$$

$$|AS| = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

Zatem

$$5x = 6\sqrt{5}$$

$$x = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$|BP| = 2x = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Długość odcinka BP jest równa $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

<u>Sposób IV</u>

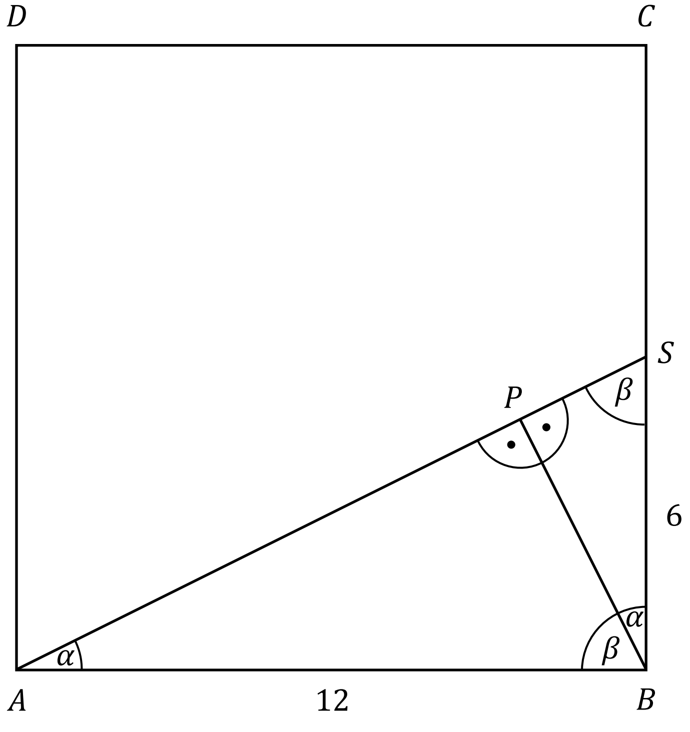
Punkt S jest środkiem odcinka BC, więc $|BS| = 6$.

Trójkąt ABS jest prostokątny. Odcinek BP jest wysokością trójkąta ABS poprowadzoną na przeciwprostokątną AS.

Z warunków zadania otrzymujemy:

- $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PBS|$
- $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle BSP|$

Zatem trójkąty ABS i BPS są podobne na podstawie cechy kąt-kąt-kąt.



Oznaczmy:

$x = |BP|$

$\alpha = |\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PBS|$

$\beta = 90^\circ - \alpha = |\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle BSP|$

Wtedy

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$

$|PS| = \frac{1}{2}x$

Z twierdzenia Pitagorasa (dla trójkąta BPS) obliczamy długość odcinka BP

$$|BP|^2 + |PS|^2 = 6^2$$

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 36$$

$$\frac{5}{4}x^2 = 36$$

$$x^2 = \frac{144}{5}$$

$$x = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

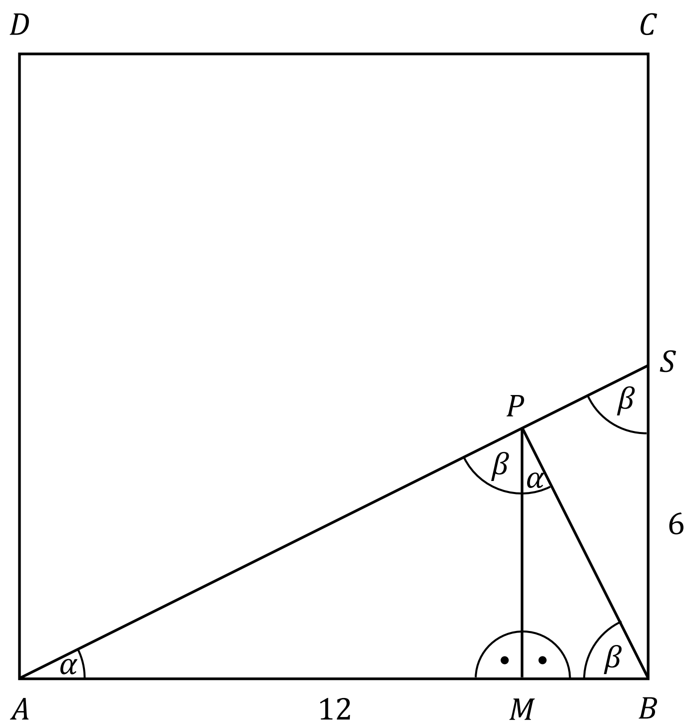
Długość odcinka BP jest równa $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

__Sposób V__

Punkt S jest środkiem odcinka BC, więc $|BS| = 6$.
Trójkąt ABS jest prostokątny. Odcinek BP jest wysokością trójkąta ABS poprowadzoną na przeciwprostokątną AS.
Poprowadźmy odcinek PM prostopadły do odcinka AB (jak na rysunku).
Z warunków zadania otrzymujemy:

- $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle BPM|$
- $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle APM| = |\sphericalangle PBM|$

Zatem trójkąty ABS, AMP, PMB są podobne na podstawie cechy kąt-kąt-kąt.



Oznaczmy:

$x = |MB|$

$\alpha = |\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle BPM|$

$\beta = 90° - \alpha = \ |\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle APM| = |\sphericalangle PBM|$

Wtedy

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2},\ \ |MP| = 2x,\ \ |AM| = 4x,\ \ |AB| = 5x = 12.$

Zatem $x = \frac{12}{5}$

Z twierdzenia Pitagorasa (dla trójkąta MBP) obliczamy długość odcinka BP

$$|BP|^2 = |MB|^2 + |MP|^2$$

$$|BP|^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2$$

$$|BP|^2 = \frac{720}{25}$$

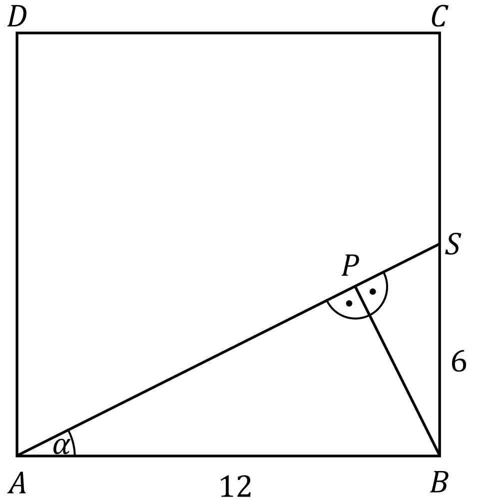
$$|BP| = \sqrt{\frac{720}{25}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Długość odcinka BP jest równa $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

Sposób VI

Punkt S jest środkiem odcinka BC, więc $|BS| = 6$.

Trójkąt ABS jest prostokątny. Odcinek BP jest wysokością trójkąta ABS poprowadzoną na przeciwprostokątną AS (jak na rysunku).



Oznaczmy: $\alpha = |\sphericalangle BAS|$. Wtedy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, zatem $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}$. Stąd $\cos\alpha = 2\cdot\sin\alpha$.

Wykorzystując tę zależność oraz tożsamość $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ otrzymujemy

$$\sin^2\alpha + (2\cdot\sin\alpha)^2 = 1$$

$$5\sin^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{5}$$

Stąd $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, ponieważ α jest kątem ostrym.

Zatem

$$\frac{|BP|}{|AB|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{|BP|}{12} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$|BP| = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Długość odcinka BP jest równa $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

Zadanie 34. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x = -2$.

1 pkt – zastosowanie własności/definicji ciągu arytmetycznego i zapisanie równania

$\frac{4x^2-1+1-x}{2} = 2x^2 + 1$ lub $(2x^2 + 1) - (4x^2 - 1) = (1 - x) - (2x^2 + 1)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający myli ciąg arytmetyczny z geometrycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.
2. Jeżeli zdający zapisze równanie $2x^2 + 1 - 4x^2 - 1 = 1 - x - 2x^2 + 1$ (tj. nie uwzględnia istotnych nawiasów) i rozwiąże je konsekwentnie do końca, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$\frac{4x^2 - 1 + 1 - x}{2} = 2x^2 + 1$$

$$4x^2 - x = 4x^2 + 2$$

$$x = -2$$

Sposób II

Z definicji/własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$(2x^2 + 1) - (4x^2 - 1) = (1 - x) - (2x^2 + 1)$$

Stąd

$$-2x^2 + 2 = -x - 2x^2$$

$$x = -2$$

Zadanie 35. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A i uzyskanie poprawnego wyniku: $P(A) = \frac{15}{36}$.

1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych lub obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega| = 6 \cdot 6$ lub sporządzenie tabeli o 36 polach odpowiadających zdarzeniom elementarnym, z których co najmniej jedno pole jest wypełnione, lub sporządzenie pełnego drzewa stochastycznego

ALBO

– wypisanie (zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niewypisanie żadnego niewłaściwego,

ALBO

– podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 15$, jeśli nie została otrzymana w wyniku zastosowania błędnej metody,

ALBO

– sporządzenie fragmentu drzewa stochastycznego, które zawiera wszystkie gałęzie sprzyjające zdarzeniu A **oraz** zapisanie prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów doświadczenia,

ALBO

– podanie prawdopodobieństwa jednoelementowego zdarzenia (elementarnego): $\frac{1}{36}$,

ALBO

– zapisanie tylko $P(A) = \frac{5}{12}$,

ALBO

– zapisanie tylko $P(A) = \frac{15}{36}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający zapisuje tylko liczby 5 i 12 lub 15 i 36 i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

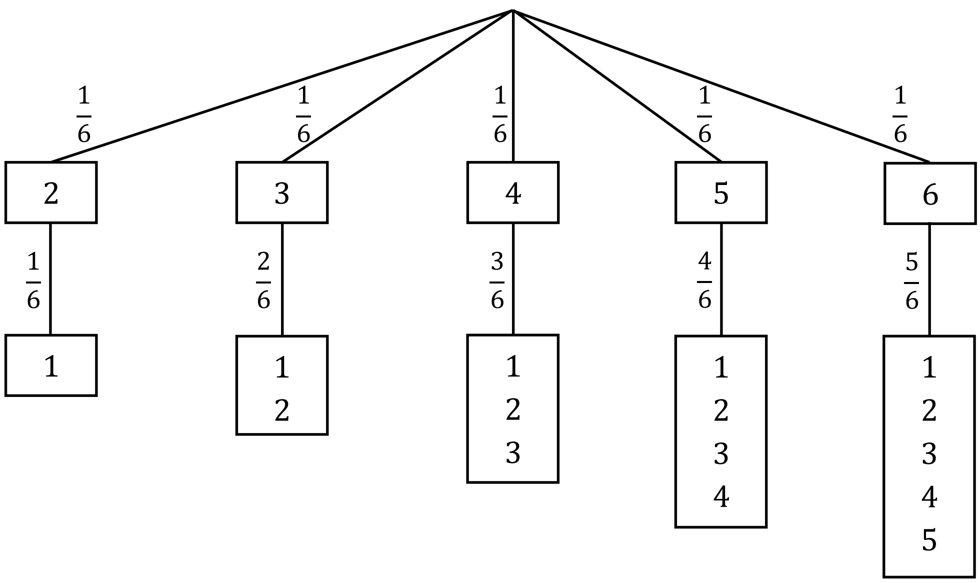
Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I
W tabeli literą A zaznaczamy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1						
2	A					
3	A	A				
4	A	A	A			
5	A	A	A	A		
6	A	A	A	A	A	

Moc zbioru Ω jest równa 36.
Zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A jest 15.
Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$.

Sposób II (drzewo stochastyczne)
Rysujemy fragment drzewa stochastycznego rozważanego doświadczenia z uwzględnieniem wszystkich istotnych gałęzi.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

Zadanie 36. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); 8.3) wyznacza równanie prostej, która jest […] prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 8.4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych; 8.5) wyznacza współrzędne środka odcinka; 8.6) oblicza odległość dwóch punktów.

Zasady oceniania

5 pkt – poprawna metoda obliczenia współrzędnych punktu P **oraz** obwodu L trójkąta ABP oraz poprawne wyniki: $P = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$, $L = \frac{5\sqrt{41}}{2} + 10$.

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktu P **oraz** obliczenie długości jednego z boków trójkąta ABP: $P = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$ oraz $|AB| = 10$ (lub $|AP| = \frac{5\sqrt{41}}{4}$).

3 pkt – obliczenie długości boku AB: $|AB| = 10$ **oraz** spełnienie jednego z poniższych warunków:

1) wyznaczenie równania symetralnej odcinka AB : $y = \frac{4}{3}x - 3$
2) zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi, np.
$$\sqrt{\left(x_p - 2\right)^2 + \left(y_p - 8\right)^2} = \sqrt{\left(x_p - 10\right)^2 + \left(y_p - 2\right)^2} \quad \text{i} \quad y_p = 0$$
3) zapisanie równania, w którym niewiadomą jest pierwsza współrzędna wierzchołka P, wynikające z prostopadłości odpowiednich wektorów, np. $(-4) \cdot \left(x_p - 6\right) + 3 \cdot (-5) = 0$

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu P: $P = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$.

2 pkt – obliczenie długości boku AB: $|AB| = 10$ **oraz** spełnienie jednego z poniższych warunków:

1) zapisanie współrzędnych środka M odcinka AB: $M = (6, 5)$
2) wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB: $a_{AB} = -\frac{3}{4}$ (lub zapisanie równania prostej AB w postaci ogólnej: $3x + 4y - 38 = 0$)
3) zapisanie drugiej współrzędnej punktu P np.: $y_p = 0$, $P = \left(x_p, 0\right)$

4) zapisanie równości $|AP| = |BP|$ w zależności od współrzędnych punktu $P = (x_p, y_p)$, np.: $\sqrt{(x_p - 2)^2 + (y_p - 8)^2} = \sqrt{(x_p - 10)^2 + (y_p - 2)^2}$

ALBO

– wyznaczenie równania symetralnej odcinka AB : $y = \frac{4}{3}x - 3$,

ALBO

– zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi, np.:

$\sqrt{(x_p - 2)^2 + (y_p - 8)^2} = \sqrt{(x_p - 10)^2 + (y_p - 2)^2}$ i $y_p = 0$

ALBO

– zapisanie równania, w którym niewiadomą jest pierwsza współrzędna wierzchołka P, wynikającego z prostopadłości odpowiednich wektorów, np.:

$(-4) \cdot (x_p - 6) + 3 \cdot (-5) = 0$

1 pkt – obliczenie długości boku AB: $|AB| = 10$

ALBO

– spełnienie jednego z poniższych warunków:

1) zapisanie współrzędnych środka M odcinka AB: $M = (6, 5)$
2) wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB: $a_{AB} = -\frac{3}{4}$ (lub zapisanie równania prostej AB w postaci ogólnej: $3x + 4y - 38 = 0$)
3) zapisanie drugiej współrzędnej punktu P np.: $y_p = 0$, $P = (x_p, 0)$
4) zapisanie równości $|AP| = |BP|$ w zależności od współrzędnych punktu $P = (x_p, y_p)$, np.: $\sqrt{(x_p - 2)^2 + (y_p - 8)^2} = \sqrt{(x_p - 10)^2 + (y_p - 2)^2}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozważa punkt P leżący na osi Ox i w rozwiązaniu popełnia tylko błędy rachunkowe, które nie przekreślają poprawności rozumowania, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **4 punkty**.

2. Jeżeli zdający rysuje w układzie współrzędnych symetralną odcinka AB i odczytuje współrzędne punktu P i zapisuje $P = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$ oraz sprawdzi rachunkowo, że $|AP| = |BP|$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **3 punkty** (jeżeli tego sprawdzenia nie wykona, to otrzymuje za tę część rozwiązania **2 punkty**, a gdy odczyta błędne współrzędne punktu P, to otrzymuje **0 punktów**).

3. Jeżeli zdający nie sporządzi rysunku i zapisze tylko $P = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$, to otrzymuje **0 punktów**; jeżeli zdający nie sporządzi rysunku, lecz zapisze $P = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$ i dalej kontynuuje rozwiązanie, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

4. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

a) zastosowanie niepoprawnego wzoru na współczynnik kierunkowy prostej

b) zastosowanie niepoprawnego związku między współczynnikami kierunkowymi prostych prostopadłych
c) zastosowanie niepoprawnego wzoru na współrzędne środka odcinka
d) zastosowanie niepoprawnego warunku prostopadłości wektorów
e) zastosowanie niepoprawnego wzoru na odległość dwóch punktów w kartezjańskim układzie współrzędnych
f) zastosowanie niepoprawnych własności symetralnej
g) przyjęcie, że wierzchołek P leży poza osią Ox,

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.
Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a)–g), to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

5. Jeżeli zdający rozważa dwa różne położenia punktu P na osi Ox i nie odrzuca niewłaściwego rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>*Sposób I*</u>

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AB:

$$a_{AB} = \frac{2-8}{10-2} = -\frac{3}{4}$$

Zatem współczynnik kierunkowy symetralnej k odcinka AB jest równy

$$a_k = \frac{4}{3}$$

Symetralna k przechodzi przez środek M odcinka AB. Obliczamy współrzędne punktu M:

$$M = \left(\frac{2+10}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (6,5)$$

Zatem prosta k ma równanie postaci

$$y = \frac{4}{3}(x-6)+5$$

$$y = \frac{4}{3}x - 3$$

Punkt P jest punktem przecięcia symetralnej k z osią Ox, więc współrzędne punktu $P = (x_p, y_p)$ spełniają równania

$$y_p = \frac{4}{3}x_p - 3 \quad \text{oraz} \quad y_p = 0$$

Stąd otrzymujemy:

$$0 = \frac{4}{3}x_p - 3 \quad \text{oraz} \quad y_p = 0$$

$$x_p = \frac{9}{4} \quad \text{oraz} \quad y_p = 0$$

Zatem $P = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$

Obliczamy długości boków trójkąta ABP:

$$|AP| = |BP| = \sqrt{\left(\frac{9}{4}-2\right)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + (-8)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}+64} = \sqrt{\frac{1025}{16}} = \frac{5\sqrt{41}}{4}$$

$$|AB| = \sqrt{(10-2)^2+(2-8)^2} = \sqrt{(8)^2+(-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

Obliczamy obwód trójkąta ABP:

$$L = 2\cdot\frac{5\sqrt{41}}{4} + 10 = \frac{5\sqrt{41}}{2} + 10$$

<u>Sposób II</u>

Ponieważ punkt P leży na osi Ox, więc jego współrzędne są równe $P = \left(x_p, 0\right)$.

Ponieważ punkt P leży na symetralnej odcinka AB, więc $|AP| = |BP|$.
Stąd i ze wzoru na odległość między dwoma punktami otrzymujemy równanie

$$\sqrt{\left(x_p - 2\right)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{\left(x_p - 10\right)^2 + (0-2)^2}$$

$$\left(x_p - 2\right)^2 + (0-8)^2 = \left(x_p - 10\right)^2 + (0-2)^2$$

$$x_p^2 - 4x_p + 4 + 64 = x_p^2 - 20x_p + 100 + 4$$

$$16x_p = 36$$

$$x_p = \frac{9}{4}$$

Zatem $P = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$.

Obliczamy długości boków trójkąta ABP:

$$|AP| = |BP| = \sqrt{\left(\frac{9}{4} - 2\right)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + (-8)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + 64} = \sqrt{\frac{1025}{16}} = \frac{5\sqrt{41}}{4}$$

$$|AB| = \sqrt{(10-2)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{(8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

Obliczamy obwód trójkąta ABP:

$$L = 2 \cdot \frac{5\sqrt{41}}{4} + 10 = \frac{5\sqrt{41}}{2} + 10$$

<u>Sposób III</u>

Ponieważ punkt P leży na osi Ox, więc jego współrzędne są równe $P=\left(x_p,0\right)$.

Obliczamy współrzędne środka M odcinka AB:

$$M=\left(\frac{2+10}{2},\frac{8+2}{2}\right)=(6,5)$$

Obliczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{MA}$ oraz $\overrightarrow{MP}$:

$$\overrightarrow{MA}=[2-6,8-5]=[-4,3]$$

$$\overrightarrow{MP}=\left[x_p-6,0-5\right]=\left[x_p-6,-5\right]$$

Wektor $\overrightarrow{MA}$ jest prostopadły do wektora $\overrightarrow{MP}$, zatem

$$-4\cdot\left(x_p-6\right)+3\cdot(-5)=0$$

$$-4x_p+24-15=0$$

$$x_p=\frac{9}{4}$$

Zatem punkt P ma współrzędne $P=\left(\frac{9}{4},0\right)$.

Obliczamy długości boków trójkąta ABP:

$$|AP|=|BP|=\sqrt{\left(\frac{9}{4}-2\right)^2+(0-8)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+(-8)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}+64}=\sqrt{\frac{1025}{16}}=\frac{5\sqrt{41}}{4}$$

$$|AB|=\sqrt{(10-2)^2+(2-8)^2}=\sqrt{(8)^2+(-6)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$$

Obliczamy obwód trójkąta ABP:

$$L=2\cdot\frac{5\sqrt{41}}{4}+10=\frac{5\sqrt{41}}{2}+10$$

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują **Zasady oceniania** stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

a) **ogólnych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);

b) dodatkowych **szczegółowych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, termin dodatkowy 2024.

I. **Ogólne zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek, wynikających z:
   - błędnego przepisania
   - przestawienia cyfr
   - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie
   - przestawienia położenia przecinka
   - przestawienia położenia znaku liczby.

2. W przypadku błędów, wynikających ze zmiany znaku liczby, należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.

3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.

4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.

5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.

6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.

7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.

8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.

9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych lub zapisze zależności, pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe **szczegółowe zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 30.

1 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego $3x^2 - 8x + 4$, tzn. zastosowanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i obliczenie tych pierwiastków
ALBO
– konsekwentne (do otrzymanego w wyniku popełnienia błędów o charakterze dyskalkulicznym ujemnego wyróżnika) narysowanie paraboli,
ALBO
– poprawne rozwiązanie nierówności $3x^2 - x + 4 < 0$ (tzn. stosuje się punkt 6. ogólnych zasad oceniania),
ALBO
– konsekwentne (do wyznaczonych przez siebie pierwiastków oraz rozpatrywanego trójmianu i nierówności) wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający, rozwiązując nierówność, pomyli porządek liczb na osi liczbowej i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $\left(2, \frac{2}{3}\right)$, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. <u>Nie stosuje się</u> uwag 2. i 3. z zasad oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 31.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 32.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 33.

1 pkt – zapisanie, że trójkąty ABS oraz APB są podobne
ALBO
– zapisanie, że trójkąty ABS oraz BPS są podobne,
ALBO
– zapisanie, że trójkąty APB oraz BPS są podobne.

Zadanie 34.

1 pkt – zapisanie równania z dwiema niewiadomymi: x oraz r (gdzie r jest różnicą ciągu arytmetycznego), np. $4x^2 - 1 + r = 2x^2 + 1$.

Zadanie 35.

1 pkt – zapisanie jedynie liczby 36 (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych).

Uwagi:
1. W ocenie rozwiązania tego zadania (dla zdających z dyskalkulią) nie stosuje się uwagi 1. ze standardowych zasad oceniania.
2. Jeżeli zdający poprawnie wypisze/zaznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, lecz popełni błąd w ich zliczeniu (np. $|A| = 14$) i konsekwentnie zapisze wynik (np. $\frac{14}{36}$), to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 36.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.