CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	EMAP-P0-100-2106, EMAP-P0-200-2106, EMAP-P0-300-2106, EMAP-P0-400-2106, EMAP-P0-700-2106, EMAP-P0-Q00-2106
Termin egzaminu:	2 czerwca 2021 r.
Data publikacji dokumentu:	21 czerwca 2021 r.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
Odp.	D	B	C	B	A	B	A	A	C	B	D	C	B	B

Nr zadania	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.
Odp.	A	A	D	B	C	B	B	B	D	C	B	B	C	D

ZADANIA OTWARTE

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.

3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 29. (0–2)

Zasady oceniania

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego x^2-4x+3.
Drugi etap to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej $x^2-4x+3<0$.

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x_1=1$ oraz $x_2=3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - odczyta z wykresu funkcji $f(x)=x^2-4x+3$ i zapisze miejsca zerowe i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

ALBO

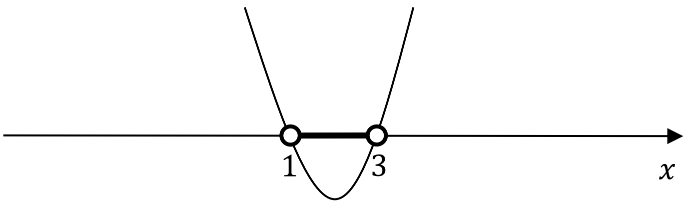
- realizując pierwszy etap rozwiązania zadania, popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a, np. $x_1 + x_2 = 3$ i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(1, 3)$ lub $x \in (1, 3)$

ALBO

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Uwagi:

1. Jeżeli zdający podzieli obustronnie nierówność przez $(x - 3)$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(3, 1)$, to przyznajemy **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Pierwszy etap rozwiązania
Przekształcamy równoważnie nierówność:

$$2(x + 1)(x - 3) < x^2 - 9$$

$$2(x^2 - 3x + x - 3) - x^2 + 9 < 0$$

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

i obliczamy pierwiastki trójmianu $x^2 - 4x + 3$:

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu: $\Delta = 4$ i stąd $x_1 = 1$ oraz $x_2 = 3$.

ALBO

- stosujemy wzory Viète'a: $x_1 \cdot x_2 = 3$ oraz $x_1 + x_2 = 4$, stąd $x_1 = 1$ oraz $x_2 = 3$.

ALBO

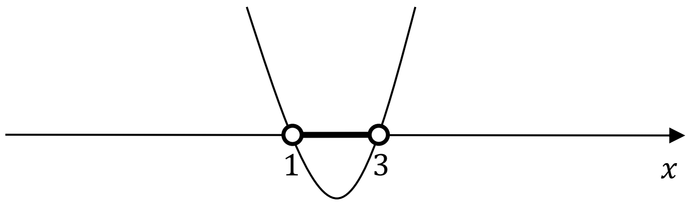
- podajemy je bezpośrednio, zapisując pierwiastki trójmianu: $x_1 = 1$ oraz $x_2 = 3$.

ALBO

- Sporządzamy wykres funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 3$, zaznaczamy miejsca zerowe na wykresie i podpisujemy $x_1 = 1$ oraz $x_2 = 3$.

Drugi etap rozwiązania

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(1, 3)$ lub $x \in (1, 3)$ lub



Zadanie 30. (0–2)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze nierówność $\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}>c+a$ lub $a+2b+c>2c+2a$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy zapisze pełne rozumowanie.

Uwaga:
Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości a, b, czy też c, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ $\frac{a+b}{2}>c$ i $\frac{b+c}{2}>a$, więc

$$\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}>c+a$$

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}>c+a$$

Odejmując od obu stron nierówności $\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$, otrzymujemy

$$b>\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$$

To należało wykazać.

Zadanie 31. (0–2)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- wykorzysta wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisze równanie z niewiadomymi a_1, a_{20}, a_{21} i r, np.:

$$\frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = 20a_{21} + 62$$

ALBO

- wykorzysta wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisze równanie z niewiadomymi a_1, a_{21} i r, np.:

$$\frac{a_1 + a_1 + 19r}{2} \cdot 20 = 20a_{21} + 62$$

ALBO

- wykorzysta wzór na n–ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisze a_{21} za pomocą a_1 i r, np.: $a_{21} = a_1 + 20r$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy obliczy różnicę r ciągu arytmetycznego: $r = -\frac{31}{105}$.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech r oznacza różnicę ciągu (a_n). Zgodnie z treścią zadania

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = 20a_{21} + 62$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego oraz ze wzoru na n–ty wyraz ciągu arytmetycznego i otrzymujemy

$$\frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = 20a_{21} + 62$$

$$\frac{a_1 + a_1 + 19r}{2} \cdot 20 = 20(a_1 + 20r) + 62$$

$$20a_1 + 190r = 20a_1 + 400r + 62$$

$$r = -\frac{62}{210} = -\frac{31}{105}$$

Zadanie 32. (0–2)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy zapisze równość pól obu trapezów (przed i po wykonaniu opisanych operacji):

$$\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{\frac{5}{4}a+\frac{5}{4}b}{2}\cdot x$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy zapisze, że wysokość h trapezu została skrócona o 20%.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Pole P trapezu jest równe $P=\frac{(a+b)\cdot h}{2}$. Po wydłużeniu podstaw oraz skróceniu wysokości trapezu powstał trapez o podstawach $\frac{5}{4}a$, $\frac{5}{4}b$ oraz wysokości x taki, że spełniona jest równość pól:

$$\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{\frac{5}{4}(a+b)}{2}\cdot x$$

Po pomnożeniu obu stron tej równości przez $\frac{2}{a+b}$ otrzymujemy $h=\frac{5}{4}x$, czyli $x=\frac{4}{5}h=0{,}8h$. Oznacza to, że wysokość h trapezu została skrócona o 20%.

Zadanie 33. (0–2)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zapisze związek między polami trójkątów FBC oraz BED: $P_{FBC} = 9P_{BED}$

ALBO

- zapisze, że trójkąty BCF i BED są podobne

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy obliczy $\frac{|CE|}{|EB|}$: $\frac{|CE|}{|EB|} = 2$.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech F będzie spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C na podstawę AB. Ponieważ $P_{ADEC} = 17P_{BED}$ i trójkąt ABC jest równoramienny, więc $P_{FBC} = 9P_{BED}$.
Prosta k jest równoległa do wysokości CF, więc trójkąty BCF i BED są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów).
Z twierdzenia o stosunku pól figur podobnych i warunków zadania otrzymujemy

$$\frac{P_{\Delta FBC}}{P_{\Delta BED}} = \left(\frac{|BC|}{|EB|}\right)^2$$

więc

$$9 = \left(\frac{|BC|}{|EB|}\right)^2$$

$$\frac{|BC|}{|EB|} = 3$$

$$\frac{|BE| + |EC|}{|EB|} = 3$$

$$\frac{|BE|}{|BE|} + \frac{|CE|}{|EB|} = 3$$

$$\frac{|CE|}{|EB|} = 2$$

Zadanie 34. (0–2)

Zasady oceniania

dla sposobów 1.–4.

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy:

- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne lub obliczy/poda ich liczbę: $|\Omega| = 6 \cdot 5$

ALBO

- zapisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A lub poda ich liczbę: $|A| = 9$

ALBO

- narysuje drzewo doświadczenia:

  a) składające się ze wszystkich 30 gałęzi i zapisze na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów odpowiednie prawdopodobieństwo lub wskaże wszystkie istotne gałęzie na tym drzewie

  ALBO

  b) składające się z mniej niż 30 gałęzi, ale wskaże na nim wszystkie gałęzie odpowiadające wylosowaniu liczby podzielnej przez 4

ALBO

- zapisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A' lub poda ich liczbę: $|A'| = 21$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze tylko: $|A| = 9$, $|\Omega| = 30$, $P(A) = \frac{9}{30}$, lub zapisze tylko $P(A) = \frac{9}{30}$ lub tylko $\frac{9}{30}$, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający sporządzi jedynie pustą tabelę o 30 pustych polach, to otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający narysuje tylko drzewko i nie wskaże wszystkich istotnych gałęzi na tym drzewie ani nie opisze żadnej gałęzi, to otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający zapisze tylko liczby 30 lub 9 lub 21 i z rozwiązania zadania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów**.
5. Jeżeli zdający popełni błąd przy wypisywaniu wszystkich par (lub wskazywaniu gałęzi istotnych drzewa) i wypisze (wskaże) o jedną za mało lub o jedną za dużo, ale nie wypisze (wskaże) żadnej niewłaściwej i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.
Zdarzeniem elementarnym jest liczba dwucyfrowa o cyfrze dziesiątek x i cyfrze jedności y, gdzie $x \in \{3,4,5,6,7,8\}$ oraz $y \in \{0,1,2,3,4\}$. Zatem zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω ma postać:

$$\Omega = \{30,31,32,33,34,40,41,42,43,44,50,51,52,53,54,\\ 60,61,62,63,64,70,71,72,73,74,80,81,82,83,84\}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 6 \cdot 5 = 30$.
Niech A oznacza zdarzenie losowe polegające na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 4. Wtedy $A = \{32,40,44,52,60,64,72,80,84\}$. Zdarzeniu A sprzyja więc 9 zdarzeń elementarnych, tj. $|A| = 9$. Stąd prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

Uwaga:
Zdający może zapisać zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych jako zbiór uporządkowanych par możliwych do utworzenia w wyniku losowania, tzn. może zastosować zapis:

$$\Omega = \{(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,0),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),\\ (5,0),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,0),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),\\ (7,0),(7,1),(7,2),(7,3),(7,4),(8,0),(8,1),(8,2),(8,3),(8,4)\}$$

Wtedy $A = \{(3,2),(4,0),(4,4),(5,2),(6,0),(6,4),(7,2),(8,0),(8,4)\}$.

Sposób 2.
Niech A oznacza zdarzenie losowe polegające na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 4.
Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia $|\Omega| = 6 \cdot 5 = 30$ lub opisujemy zbiór zdarzeń elementarnych np. w postaci tabeli

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
3	30	31	32	33	34
4	40	41	42	43	44
5	50	51	52	53	54
6	60	61	62	63	64
7	70	71	72	73	74
8	80	81	82	83	84

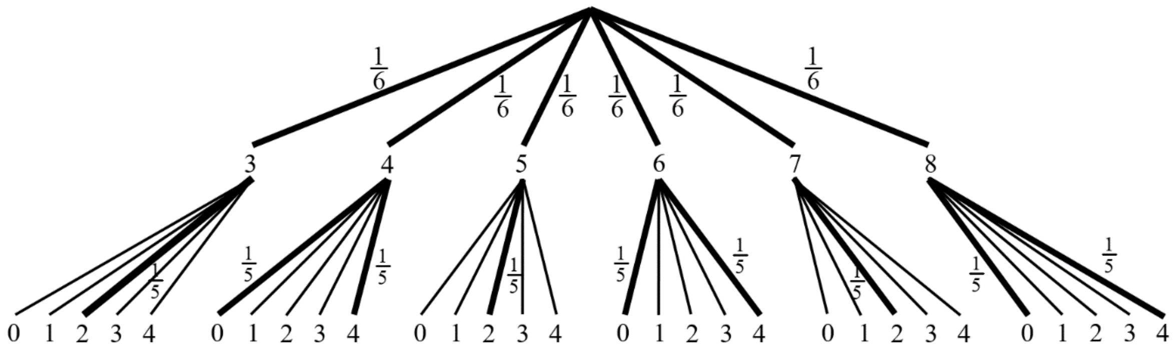
Wskazujemy elementy zbioru A i zliczamy je: $|A| = 9$. Ponieważ wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, więc korzystamy z klasycznej definicji prawdopodobieństwa:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

Sposób 3.

Niech A oznacza zdarzenie losowe polegające na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 4.

Rysujemy drzewo stochastyczne rozważanego doświadczenia.

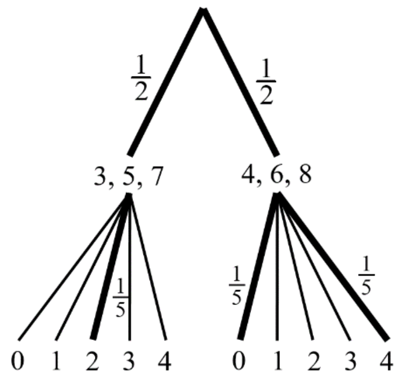


Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

Uwaga:

Zdający może narysować drzewo stochastyczne, w którym na pierwszym etapie losujemy cyfrę nieparzystą lub parzystą.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A może być obliczone w następujący sposób:

$$P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

Sposób 4.

Niech A oznacza zdarzenie losowe polegające na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 4.

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia $|\Omega| = 6 \cdot 5 = 30$ lub opisujemy zbiór zdarzeń elementarnych np. w postaci tabeli

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
3	30	31	32	33	34
4	40	41	42	43	44
5	50	51	52	53	54
6	60	61	62	63	64
7	70	71	72	73	74
8	80	81	82	83	84

Wskazujemy elementy zbioru A' i zliczamy je: $|A'| = 21$. Ponieważ wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, więc korzystamy z klasycznej definicji prawdopodobieństwa:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{21}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

Zadanie 35. (0–5)

Zasady oceniania

dla sposobów 1.–3.

Zdający otrzymuje ....1 p.

gdy:

- wyznaczy równanie prostej zawierającej wysokość opuszczoną z wierzchołka C na bok AB: $y = \frac{1}{2}x + 4$

ALBO

- obliczy długość ramienia BC: $|BC| = \sqrt{74}$

ALBO

- obliczy współczynnik kierunkowy prostej BC: $a_{BC} = \frac{7}{5}$

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy:

- obliczy współrzędne punktu D, będącego środkiem odcinka AB: $D = \left(\frac{24}{5}, \frac{32}{5}\right)$

ALBO

- zapisze równanie wynikające z równoramienności trójkąta ABC, umożliwiające obliczenie pierwszej współrzędnej x_A punktu A:

$$\sqrt{\left(x_A - (-2)\right)^2 + (-2x_A + 16 - 3)^2} = \sqrt{\left(3 - (-2)\right)^2 + (10 - 3)^2}$$

ALBO

- wyznaczy równanie prostej AC: $y = -\frac{1}{43}x + \frac{127}{43}$

Zdający otrzymuje .... 3 p.

obliczy współrzędne punktu A: $A = \left(\frac{33}{5}, \frac{14}{5}\right)$.

Zdający otrzymuje ....4 p.

gdy obliczy długość podstawy AB i wysokość CD trójkąta: $|AB| = \frac{18\sqrt{5}}{5}$, $|CD| = \frac{17\sqrt{5}}{5}$.

Zdający otrzymuje .... 5 p.

gdy obliczy współrzędne punktu A i obliczy pole trójkąta ABC: $A = \left(\frac{33}{5}, \frac{14}{5}\right)$, $P_{ABC} = \frac{153}{5}$.

Uwaga:

Jeśli zdający realizuję strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **4 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Trójkąt ABC jest równoramienny, więc wysokość opuszczona z wierzchołka C na podstawę AB jest jednocześnie środkową trójkąta ABC.

Niech D będzie środkiem odcinka AB.

Wyznaczamy równanie prostej CD, zawierającej wysokość trójkąta:

$$y = ax + b$$

$$a \cdot (-2) = -1 \qquad \text{(gdyż } CD \perp y = -2x + 16\text{)}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$3 = \frac{1}{2} \cdot (-2) + b \qquad \text{(gdyż } C \in CD\text{)}$$

$$b = 4$$

Zatem prosta CD ma równanie $y = \frac{1}{2}x + 4$.

Wyznaczamy współrzędne punktu D (tj. punktu, w którym przecinają się proste AB i CD):

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 4 \\ y = -2x + 16 \end{cases}$$

Stąd $x = \frac{24}{5}$ i $y = \frac{32}{5}$, więc $D = \left(\frac{24}{5}, \frac{32}{5}\right)$.

Korzystamy z faktu, że D jest środkiem odcinka AB i obliczamy współrzędne punktu A:

$$\left(\frac{24}{5}, \frac{32}{5}\right) = \left(\frac{x_A + 3}{2}, \frac{y_A + 10}{2}\right)$$

$$\frac{24}{5} = \frac{x_A + 3}{2} \quad \text{ i } \quad \frac{32}{5} = \frac{y_A + 10}{2}$$

Stąd $A = \left(\frac{33}{5}, \frac{14}{5}\right)$.

Obliczamy długości podstawy AB i wysokości CD trójkąta:

$$|AB| = \sqrt{\left(3 - \frac{33}{5}\right)^2 + \left(10 - \frac{14}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{36}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{324}{25} + \frac{4 \cdot 324}{25}} = \sqrt{\frac{324}{25} \cdot 5} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$$

$$|CD| = \sqrt{\left(\frac{24}{5} - (-2)\right)^2 + \left(\frac{32}{5} - 3\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{34}{5}\right)^2 + \left(\frac{17}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 289}{25} + \frac{289}{25}} = \sqrt{\frac{289}{25} \cdot 5} = \frac{17\sqrt{5}}{5}$$

Obliczamy pole P_{ABC} trójkąta ABC:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot \frac{18\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{17\sqrt{5}}{5} = \frac{153}{5}$$

Sposób 2.

Niech x_A oznacza pierwszą współrzędną punktu A. Punkt A leży na prostej $y=-2x+16$, więc $A=(x_A,-2x_A+16)$.

Trójkąt ABC jest równoramienny, w którym $|CA|=|CB|$. Stąd

$$\sqrt{\left(x_A-(-2)\right)^2+(-2x_A+16-3)^2}=\sqrt{\left(3-(-2)\right)^2+(10-3)^2}$$

i dalej

$$\sqrt{(x_A+2)^2+(-2x_A+13)^2}=\sqrt{74}$$

$$5(x_A)^2-48x_A+99=0$$

$$\Delta=(-48)^2-4\cdot 5\cdot 99=324$$

$$x_A=\frac{48-18}{10}=3 \text{ lub } x_A=\frac{48+18}{10}=\frac{33}{5}$$

Rozwiązanie $x_A=3$ odrzucamy, gdyż wtedy punkty A i B pokrywałyby się.

Zatem $A=\left(\frac{33}{5},\frac{14}{5}\right)$.

Obliczymy pole P_{ABC} trójkąta ABC, korzystając ze wzoru

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)|$$

Otrzymujemy

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left(3-\frac{33}{5}\right)\left(3-\frac{14}{5}\right)-\left(10-\frac{14}{5}\right)\left(-2-\frac{33}{5}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(-\frac{18}{5}\right)\cdot\frac{1}{5}-\frac{36}{5}\cdot\left(-\frac{43}{5}\right)\right|=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1530}{25}\right|=\frac{153}{5}$$

Sposób 3.

Trójkąt ABC jest równoramienny o podstawie AB. Niech $\alpha=|\measuredangle CAB|=|\measuredangle CBA|$.
Wyznaczamy równanie prostej BC:

$$\begin{cases}10=a\cdot 3+b\\ 3=a\cdot(-2)+b\end{cases}$$

Stąd $a=\frac{7}{5}$ i $b=\frac{29}{5}$.

Proste AB i BC tworzą kąt ostry α, więc

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{a_{BC}-a_{AB}}{1+a_{BC}\cdot a_{AB}}\right|=\left|\frac{\frac{7}{5}-(-2)}{1+\frac{7}{5}\cdot(-2)}\right|=\left|-\frac{17}{9}\right|=\frac{17}{9}$$

Proste AB i AC tworzą kąt ostry α, więc

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{a_{AC}-a_{AB}}{1+a_{AC}\cdot a_{AB}}\right|=\left|\frac{a_{AC}-(-2)}{1+a_{AC}\cdot(-2)}\right|=\left|\frac{a_{AC}+2}{1-2a_{AC}}\right|$$

Łącząc ostatnie dwa równania, otrzymujemy kolejno

$$\left|\frac{a_{AC}+2}{1-2a_{AC}}\right| = \frac{17}{9}$$

$$\frac{a_{AC}+2}{1-2a_{AC}} = \frac{17}{9} \quad \text{lub} \quad \frac{a_{AC}+2}{1-2a_{AC}} = -\frac{17}{9}$$

$$9(a_{AC}+2) = 17(1-2a_{AC}) \quad \text{lub} \quad 9(a_{AC}+2) = -17(1-2a_{AC})$$

$$43a_{AC} = -1 \quad \text{lub} \quad 25a_{AC} = 35$$

$$a_{AC} = -\frac{1}{43} \quad \text{lub} \quad a_{AC} = \frac{7}{5}$$

Rozwiązanie $a_{AC} = \frac{7}{5}$ odrzucamy, gdyż wtedy proste AC i BC pokrywałyby się. Zatem $a_{AC} = -\frac{1}{43}$.

Wyznaczamy równanie prostej AC: $3 = -\frac{1}{43}\cdot(-2) + b$, skąd otrzymujemy $b = \frac{127}{43}$, $y = -\frac{1}{43}x + \frac{127}{43}$.

Wyznaczamy współrzędne punktu A jako punktu przecięcia prostych AB i AC:

$$\begin{cases} y = -2x + 16 \\ y = -\frac{1}{43}x + \frac{127}{43} \end{cases}$$

Stąd $x = \frac{33}{5}$ oraz $y = \frac{14}{5}$.

Obliczamy wysokość h trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C na podstawę AB jako odległość wierzchołka C od prostej AB:

$$h = d(C, \text{pr. } AB) = \frac{|2\cdot(-2) + 3 - 16|}{\sqrt{2^2 + 1^1}} = \frac{|-17|}{\sqrt{5}} = \frac{17}{\sqrt{5}}$$

Obliczamy długość boku AB:

$$|AB| = \sqrt{\left(3 - \frac{33}{5}\right)^2 + \left(10 - \frac{14}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{36}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{324}{25} + \frac{4\cdot 324}{25}} = \sqrt{\frac{324}{25}\cdot 5} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$$

Obliczamy pole P_{ABC} trójkąta ABC:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|CD| = \frac{1}{2}\cdot\frac{18\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{17\sqrt{5}}{5} = \frac{153}{5}$$

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują zasady oceniania stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

I. ogólnych zasad oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);
II. dodatkowych szczegółowych zasad oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – matura z matematyki, poziom podstawowy, termin dodatkowy 2021.

I. Ogólne zasady oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek, wynikających z:
   - błędnego przepisania,
   - przestawienia cyfr,
   - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie,
   - przestawienia położenia przecinka.
2. W przypadku błędów, wynikających ze zmiany znaku liczby, należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.
8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.
9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych lub zapisze zależności, pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych

sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.

11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe szczegółowe zasady oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 29.

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- stosuje poprawną metodę obliczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2 - 4x + 3$, tzn. stosuje wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego i oblicza te pierwiastki, popełniając błędy o charakterze dyskalkulicznym

ALBO

- zdający w wyniku obliczeń otrzyma wyróżnik ujemny, ale konsekwentnie narysuje parabolę

ALBO

- poprawnie rozwiąże nierówność $2(x+1)(x-3) < 0$.

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:

- pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in (3, 1)$.

Uwaga:

Jeżeli zdający zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci przedziału domkniętego, to może otrzymać co najwyżej **1 pkt**.

Zadanie 30.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 31.

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- zapisze $a_1 + (a_1 + r) + \cdots + (a_1 + 19r) = 20a_{21} + 62$.

Zadanie 32.

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- zapisze długości podstaw trapezu po ich wydłużeniu, np.: $1{,}25a$ oraz $1{,}25b$ (albo $a + 25\% \cdot a$ oraz $b + 25\% \cdot b$).

Zadanie 33.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 34.

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- zapisze jedynie liczbę 30 (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych).

ALBO

- zapisze liczbę 9, o ile z zapisów wynika, że interpretuje tę liczbę jako liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A (np. jest to zilustrowane wypisaniem kilku zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i zdający nie zapisze zdarzeń elementarnych, które nie sprzyjają zdarzeniu A).

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:

- <u>poprawnie wypisze (lub zaznaczy)</u> wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, popełni błąd w ich zliczeniu i konsekwentnie zapisze wynik $\frac{x}{30}$, gdzie x jest liczbą zliczonych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A.

Zadanie 35.

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- zastosuje poprawną metodę obliczenia długości boku BC trójkąta

ALBO

- zastosuje poprawną metodę obliczenia współczynnika kierunkowego w równaniu prostej BC

ALBO

- zastosuje poprawną metodę wyznaczenia równania prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C.

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:

- zastosuje poprawną metodę wyznaczenia równania prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C oraz zastosuje poprawną metodę wyznaczenia współrzędnych środka D odcinka AB jako punktu przecięcia prostej AB z prostą CD

ALBO

- zastosuje poprawną metodę wyznaczenia równania prostej AC.