CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2017/2018

FORMUŁA OD 2015
„NOWA MATURA”
i
FORMUŁA DO 2014
„STARA MATURA”

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

SIERPIEŃ 2018

Egzaminatorze!

- Oceniaj prace zdających uczciwie i z zaangażowaniem.
- **Stosuj przyjęte zasady oceniania w sposób obiektywny**. Pamiętaj, że każda merytorycznie poprawna odpowiedź, spełniająca warunki określone w poleceniu, musi zostać pozytywnie oceniona, nawet jeżeli nie została przewidziana w przykładowych odpowiedziach w zasadach oceniania.
- Konsultuj niejednoznaczne rozwiązania zadań z innymi egzaminatorami lub przewodniczącym zespołu egzaminatorów. W przypadku niemożności osiągnięcia wspólnego stanowiska, rozstrzygajcie na korzyść zdającego.
- Przyznając punkty, nie kieruj się emocjami.
- Informuj przewodniczącego o wszystkich nieprawidłowościach zaistniałych w trakcie oceniania, w tym podejrzeń o niesamodzielność w pisaniu pracy.

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	B	A	A	D	B	B	C	C	D	D	A	D	A	B	C	A	B	C	D	A	D	D	B	C	C

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $x^2+6x-16<0$.

Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2+6x-16$.

Drugi etap to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej.

Pierwszy etap rozwiązania może zostać zrealizowany następująco:

- obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2+6x-16$
  - obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
    $\Delta=36-4\cdot1\cdot(-16)=100$ i stąd $x_1=\frac{-6-10}{2}=-8$ oraz $x_2=\frac{-6+10}{2}=2$

  albo
  - stosujemy wzory Viète'a:
    $x_1\cdot x_2=-16$ oraz $x_1+x_2=-6$, stąd $x_1=-8$ oraz $x_2=2$.

Drugi etap rozwiązania:

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-8,2)$ lub $x\in(-8,2)$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1=-8$ i $x_2=2$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x)=x^2+6x-16$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- realizując pierwszy etap popełni błędy, ale obliczy dwa różne pierwiastki trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności.

Zdający otrzymuje ………………………………………………………………………. 2 p.

gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-8,2)$ lub $x\in(-8,2)$, lub $x>-8\wedge x<2$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów

Uwagi
1. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci: $x<2$ lub $x>-8$, $x<2$ oraz $x>-8$, itp.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1=-8$, $x_2=2$ i błędnie zapisze odpowiedź, np. $x\in(8,2)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający po rozwiązaniu nierówności zapisuje w odpowiedzi, jako zbiór rozwiązań, zbiór, zawierający elementy nienależące do rzeczywistego zbioru rozwiązań lub zbiór pusty, to otrzymuje **1 punkt**. Zapisanie w miejscu przeznaczonym na odpowiedź pierwiastków trójmianu kwadratowego nie jest traktowane jak opis zbioru rozwiązań.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x\in(2,-8)$ lub $(2,-8)$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie $(x^3+27)(x^2-16)=0$.

Przykładowe rozwiązanie

Lewa strona równania jest iloczynem dwóch czynników x^3+27 oraz x^2-16. Zatem iloczyn ten jest równy 0, gdy co najmniej jeden z tych czynników jest równy 0, czyli $x^3+27=0$ lub $x^2-16=0$.

Rozwiązaniem równania $x^3+27=0$ jest $x=\sqrt[3]{-27}=-3$.

Równanie $x^2-16=0$ doprowadzamy do postaci iloczynowej $(x-4)\cdot(x+4)=0$.

Przynajmniej jeden z czynników $x-4$ lub $x+4$ jest równy 0, czyli $x=4$ lub $x=-4$.

Wszystkie rozwiązania równania $(x^3+27)(x^2-16)=0$,
to $x=-3$ lub $x=4$, lub $x=-4$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... **1 p.**

gdy:
- zapisze dwa równania $x^3+27=0$ i $x^2-16=0$

albo

- wyznaczy poprawnie (lub poda) rozwiązania jednego z równań: $x^3+27=0$ lub $x^2-16=0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

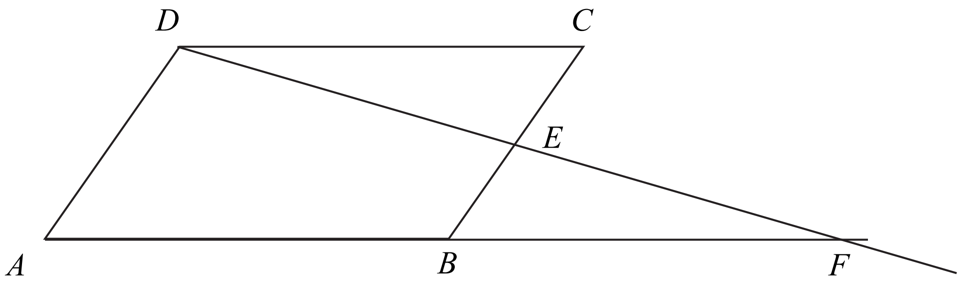
Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania: $x=-3$ lub $x=4$, lub $x=-4$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający poda wszystkie rozwiązania równania, bez rachunków lub uzasadnienia, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający uzyska trafne rozwiązania równania, ale w wyniku błędnej metody, to otrzymuje **0 punktów**, o ile nie uzyska 1 punktu za zapisanie dwóch równań $x^3+27=0$ i $x^2-16=0$.
3. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy pierwiastki wielomianu $\left(x^3+27\right)\left(x^2-16\right)$ i poda niewłaściwą odpowiedź, np. $x\in\mathbb{R}-\{-4,-3,4\}$, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 28. (0–2)

W równoległoboku *ABCD* punkt *E* jest środkiem boku *BC*. Z wierzchołka *D* poprowadzono prostą przecinającą bok *BC* w punkcie *E*. Proste *AB* i *DE* przecinają się w punkcie *F* (zobacz rysunek). Wykaż, że punkt *B* jest środkiem odcinka *AF*.



Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u> (podobieństwo)

Rozpatrujemy trójkąty *AFD* i *BFE*.

Kąty *DAF* i *EBF* są odpowiadające i odcinki *AD* i *BC* są równoległe, więc $|\sphericalangle DAF|=|\sphericalangle EBF|$.

Tak samo wnioskujemy, że $|\sphericalangle ADF|=|\sphericalangle BEF|$. Ponadto kąt przy wierzchołku *F* jest kątem wspólnym w obu trójkątach, więc z cechy *kkk* podobieństwa trójkątów wnioskujemy, że trójkąty *AFD* i *BFE* są podobne.

Stąd wynika proporcja

$$\frac{|AD|}{|BE|}=\frac{|AF|}{|BF|},$$

ale $|BE|=\frac{1}{2}|BC|=\frac{1}{2}|AD|$, gdyż punkt *E* jest środkiem boku *BC*.

Zatem

$$\frac{|AD|}{\frac{1}{2}|AD|}=\frac{|AF|}{|BF|},\ \text{czyli}\ |AF|=2|BF|,$$

co należało wykazać.

II sposób (przystawanie)
Rozpatrujemy trójkąty *BFE* oraz *CDE*.
1. Kąty *BEF* i *CED* są wierzchołkowe, więc $|\sphericalangle BEF| = |\sphericalangle CED|$.
2. Kąty *FBE* i *DCE* są naprzemianległe i proste *AB* i *CD* są równoległe, więc $|\sphericalangle FBE| = |\sphericalangle DCE|$
3. Punkt *E* jest środkiem boku *BC*, więc $|BE| = |EC|$.
Stąd, na mocy cechy *kbk* przystawania trójkątów wnioskujemy, że trójkąty *BFE* i *CDE* są przystające. Zatem $|BF| = |CD|$.
Ponieważ czworokąt *ABCD* jest równoległobokiem, więc $|AB| = |CD|$. Z ostatnich dwóch równości wynika, że $|AB| = |BF|$, co oznacza, że punkt *B* jest środkiem odcinka *AF*.
To należało wykazać.

Schemat punktowania
Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy
- zapisze lub wykorzysta przystawanie trójkątów *BFE* oraz *CDE*

albo
- zauważy podobieństwo trójkątów *AFD* i *BFE*, zapisze proporcję, wynikającą z tego podobieństwa, np. $\frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|AF|}{|BF|}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.
Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 29. (0–2)

Wykaż, że jeżeli a i b są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$.

Przykładowe rozwiązanie

Przekształcamy równoważnie wyrażenie $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$

i otrzymujemy

$$1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1 \geq 4,$$

$$\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2,$$

$$a^2+b^2 \geq 2ab,$$

$$(a-b)^2 \geq 0.$$

Ta kończy dowód.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy poprawnie przekształci nierówność do postaci, w której liczby a i b występują jedynie w wyrażeniach: a^2, b^2 i ab, np.: $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$ lub $a^2+b^2 \geq 2ab$.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwagi

1. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ i zapisze, że jest ona prawdziwa dla dowolnych liczb dodatnich, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $a^2+b^2 \geq 2ab$ i zapisze, że jest ona prawdziwa dla dowolnych liczb, to otrzymuje **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający przeprowadzi poprawne rozumowanie, które zakończy zapisaniem nierówności $(a-b)^2 \geq 0$, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości a i b, to otrzymuje **0 punktów**.
6. Jeżeli zdający w wyniku poprawnych przekształceń równoważnych otrzyma nierówność $(a+b)^2 \geq 4ab$, to otrzymuje **1 punkt**.
7. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ i dopisze komentarz o średnich, uzasadniający jej prawdziwość dla dowolnych liczb dodatnich a, b, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 30. (0–2)

Dziewiąty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równy 34, a suma jego ośmiu początkowych wyrazów jest równa 110. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

Przykładowe rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na a_9:

$$a_9 = a_1 + (9-1) \cdot r .$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na S_8:

$$S_8 = \frac{2a_1 + (8-1) \cdot r}{2} \cdot 8 .$$

Otrzymujemy układ równań

$$34 = a_1 + 8r \text{ i } 110 = 8a_1 + 28r .$$

Stąd otrzymujemy

$$a_1 = -2,\ r = 4,5 .$$

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze dwa równania z dwiema niewiadomymi a_1 i r wynikające z zastosowania poprawnych wzorów na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

np.: $34 = a_1 + 8r$ i $110 = \frac{2a_1 + 7r}{2} \cdot 8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = -2$ i obliczy różnicę ciągu: $r = 4,5$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, zapisze poprawny ciąg poprzez wypisanie 8 początkowych kolejnych wyrazów i ustali, że $a_1 = -2$ i $r = 4,5$, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, wypisze co najmniej trzy kolejne wyrazy i ustali, że $a_1 = -2$ i $r = 4,5$, ale nie zapisze wszystkich 8 początkowych wyrazów ciągu, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zapisze tylko $a_1 = -2$ i $r = 4,5$, to otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający dodaje do sumy ośmiu początkowych wyrazów wyraz dziewiąty i zapisuje właściwe równanie z niewiadomą a_1, to otrzymuje przynajmniej **1 punkt**.

Zadanie 31. (0–2)

Punkty $A=(2,4)$, $B=(0,0)$, $C=(4,-2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Punkt D jest środkiem boku AC tego trójkąta. Wyznacz równanie prostej BD.

Przykładowe rozwiązania

Punkt D jest środkiem odcinka AC, więc ze wzorów na współrzędne środka odcinka otrzymujemy

$$D=\left(\frac{2+4}{2},\frac{4+(-2)}{2}\right)=(3,1)\ .$$

Pozostaje wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $B=(0,0)$ i $D=(3,1)$.

<u>I sposób</u>

Szukane równanie ma postać $y=ax+b$. Ponieważ punkty B i D leżą na tej prostej, więc możemy zapisać układ równań:

$$\begin{cases} a\cdot 3+b=1 \\ a\cdot 0+b=0. \end{cases}$$

Z drugiego równania mamy $b=0$, a odejmując stronami otrzymujemy $3a=1$, czyli $a=\frac{1}{3}$.

<u>II sposób</u>

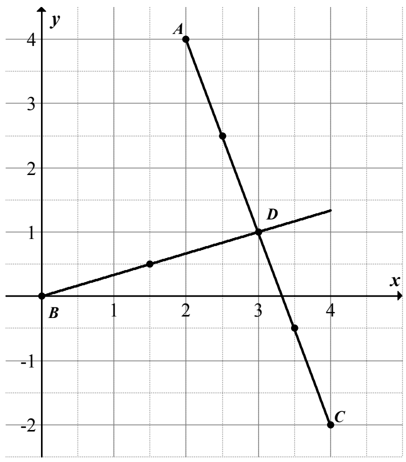
Podstawmy współrzędne punktów $D=(3,1)$ oraz $B=(0,0)$ do równania prostej, przechodzącej przez dane dwa punkty:

$$(y-1)(0-3)-(0-1)(x-3)=0\ .$$

Stąd $-3(y-1)+x-3=0$, czyli $-3y+3+x-3=0$. Zatem $y=\frac{1}{3}x$.

<u>III sposób</u>

Możemy zaznaczyć w układzie współrzędnych wierzchołki trójkąta i korzystając z punktów kratowych ustalić zależność między prostą AC i prostą do niej prostopadłą przechodzącą przez środek odcinka AC, np. tak, jak na rysunku.



Zauważamy wówczas, że szukana prosta ma równanie $y=\frac{1}{3}x$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy

- wyznaczy lub poda współrzędne środka D odcinka AC: $D=(3,1)$

albo

- zaznaczy w układzie współrzędnych wierzchołki trójkąta *ABC* i zaznaczy na rysunku prostą *BD* oraz wyznaczy lub poda współczynnik kierunkowy prostej *AC*: -3.

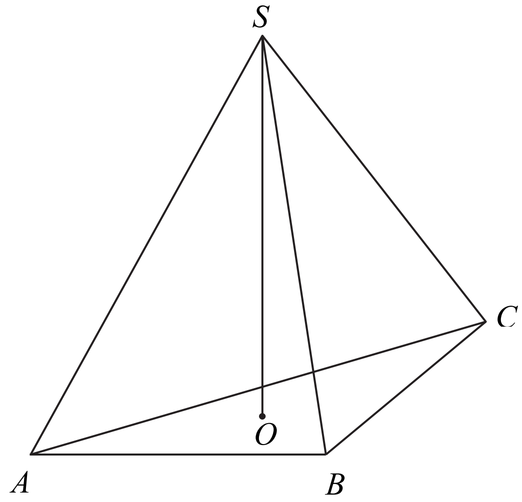
Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy wyznaczy równanie prostej *BD*: $y=\frac{1}{3}x$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej *AC* i przechodzącej przez punkt *B* oraz zapisze (zaznaczy na rysunku), że trójkąt *ABC* jest równoramienny, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej *AC* i przechodzącej przez punkt *B*, ale nie zapisze (nie zaznaczy na rysunku), że trójkąt *ABC* jest równoramienny, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający wyznacza równanie prostej prostopadłej do prostej *AC* i przechodzącej przez punkt *B* i popełni przy tym błąd lub nie doprowadzi rozwiązania do końca, ale zapisze (zaznaczy na rysunku), że trójkąt *ABC* jest równoramienny, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 32. (0–5)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ krawędź podstawy ma długość a. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest dwa razy większe od pola jego podstawy. Oblicz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.



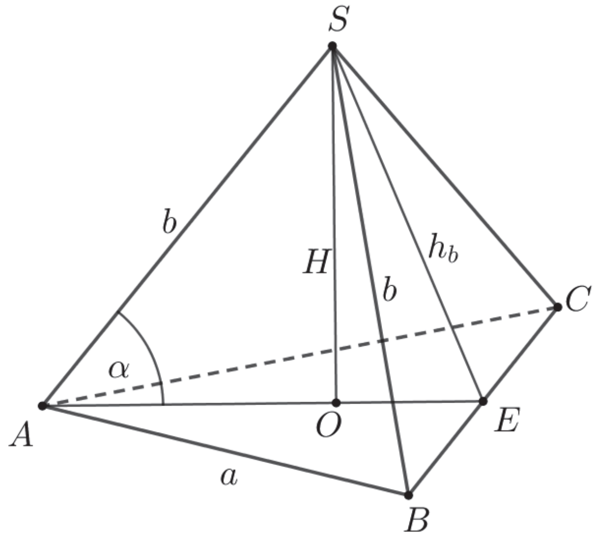
Przykładowe rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia:

h_b – wysokość ściany bocznej ostrosłupa,

α – kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy,

E – środek krawędzi BC.



Z podanej zależności pól $2 \cdot P_p = P_b$ otrzymujemy równanie

$$2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_b ,$$

skąd otrzymujemy

$$h_b = \frac{a\sqrt{3}}{3} .$$

Trójkąt ABC jest równoboczny, spodek O wysokości ostrosłupa jest środkiem ciężkości tego trójkąta, więc $|AE| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ oraz $|AO| = \frac{2}{3}|AE|$. Stąd

$$|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3} .$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym *BES* i otrzymujemy

$$|SB|=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Ponieważ w ostrosłupie prawidłowym krawędzie boczne mają równe długości, więc

$$|AS|=|BS|=\frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Z definicji cosinusa w trójkącie prostokątnym *AOS* otrzymujemy

$$\cos\alpha=\frac{|AO|}{|AS|}.\ \cos\alpha=\frac{|AO|}{|AS|}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{21}}{6}}=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Uwaga

Zamiast wyznaczać długość krawędzi bocznej może wyznaczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *OES* wysokość *SO* ostrosłupa:

$$|SO|=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{a}{2}.$$

Następnie z trójkąta prostokątnego *ASO* możemy obliczyć tangens kąta α :

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{|SO|}{|AO|}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Korzystając z tożsamości trygonometrycznych możemy obliczyć cosinus kąta α :

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{oraz}\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

Z pierwszego równanie otrzymujemy $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$. Stąd i z drugiego równania otrzymujemy

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)^2+\cos^2\alpha=1,$$

$$\frac{7}{4}\cos^2\alpha=1,$$

$$\cos^2\alpha=\frac{4}{7}.$$

Stąd $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$, gdyż kąt α jest ostry.

Schemat punktowania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.
Zdający:

- zaznaczy na rysunku kąt α lub zapisze $\cos\alpha=\frac{|AO|}{|AS|}$

albo

- wyznaczy długość odcinka *AO*: $|AO|=\frac{a\sqrt{3}}{3}$,

albo

- wyznaczy długość odcinka *EO*: $|EO|=\frac{a\sqrt{3}}{6}$,

albo

- zapisze równanie z dwiema niewiadomymi a i h_b wynikające z zależności między polem podstawy i polem powierzchni bocznej ostrosłupa: $2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_b$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający wyznaczy wysokość ściany bocznej ostrosłupa opuszczoną na krawędź podstawy:
$h_b = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający

- wyznaczy długość krawędzi bocznej $|AS| = \frac{a\sqrt{21}}{6}$ i nie wyznaczy długości odcinka AO

albo

- wyznaczy długość odcinka AO i wysokość ostrosłupa: $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $|SO| = \frac{a}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.
Zdający:

- wyznaczy $|AS| = \frac{a\sqrt{21}}{6}$ i $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

albo

- obliczy $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,

albo

- obliczy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy wartość $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, a jedynymi błędami w przedstawionym rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje **4 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełnia błąd polegający na zastosowaniu niepoprawnego wzoru na pole trójkąta równobocznego, to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
3. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny, stosując twierdzenie Pitagorasa, to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
4. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny, przyjmując, że punkt O jest środkiem odcinka AE lub przyjmie, że $|AO| = \frac{1}{3}|AE|$, to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
5. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na niewłaściwym określeniu zależności między polem podstawy a polem powierzchni bocznej, przyjmując $P_p = 2P_b$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

6. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na niewłaściwym określeniu zależności między polem podstawy a polem powierzchni bocznej, przyjmując $2P_p = P_{sb}$ lub $P_p = 2P_{sb}$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
7. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
8. Jeżeli zdający poprawnie rozwiązuje zadanie, oblicza $\text{tg}\alpha$ lub $\sin\alpha$, a następnie podaje przybliżoną wartość cosinusa z tablic, to może otrzymać maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 33. (0–4)

Ze zbioru $A=\{-3,-2,-1,1,2,3\}$ losujemy liczbę *a*, natomiast ze zbioru $B=\{-1,0,1,2\}$ losujemy liczbę *b*. Te liczby są – odpowiednio – współczynnikiem kierunkowym i wyrazem wolnym funkcji liniowej $f(x)=ax+b$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymana funkcja f jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe.

Przykładowe rozwiązanie

Zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para (a,b) liczb, gdzie $a\in A$ oraz $b\in B$. Liczba $|\Omega|$ wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega|=6\cdot 4=24.$$

Niech *Z* oznacza zdarzenie polegające na tym, że otrzymana funkcja *f* jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe. Funkcja liniowa jest rosnąca, gdy współczynnik kierunkowy *a* jest dodatni, więc $a\in\{1,2,3\}$. Rosnąca funkcja liniowa ma dodatnie miejsce zerowe tylko wówczas, gdy jej wykres przecina oś *Oy* w punkcie o ujemnej rzędnej. Zatem współczynnik *b* musi być równy -1.

Zbiór *Z* ma więc postać

$$Z=\{(1,-1),(2,-1),(3,-1)\}.$$

Zatem liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *Z* jest równa

$$|Z|=3.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia *Z* jest równe:

$$P(Z)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=6\cdot 4=24$ lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne

albo

- zapisze, że funkcja liniowa *f* jest rosnąca tylko dla $a\in\{1,2,3\}$,

albo

- zapisze, że funkcja liniowa *f*, jako funkcja rosnąca, ma dodatnie miejsce zerowe dla $b=-1$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=6\cdot 4$ lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne oraz zapisze, że funkcja liniowa f jest rosnąca tylko dla $a\in\{1,2,3\}$

albo

- zapisze, że funkcja liniowa f jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe dla $a\in\{1,2,3\}$ i $b=-1$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 p.**
Zdający obliczy lub poda liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 6 \cdot 4$ oraz

- wyznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *Z*:
  ($Z = \{(1,-1),(2,-1),(3,-1)\}$)

albo

- zapisze, że $a \in \{1,2,3\}$, $b = -1$ oraz $|Z| = 3$.

Rozwiązanie pełne .... **4 p.**
Zdający obliczy szukane prawdopodobieństwo: $\frac{1}{8}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający uzyska w wyniku końcowym liczbę spoza przedziału $\langle 0,1\rangle$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający poda, że $|Z| = 3$ i nie zapisze zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *Z* i z rozwiązania nie można wywnioskować, które zdarzenia elementarne zdający bierze pod uwagę, ale zapisze, że $a \in \{1,2,3\}$ (albo tylko $b = -1$), to za całe rozwiązanie zdający może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający poda, że $|Z| = 3$ i nie zapisze zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *Z* i z rozwiązania nie można wywnioskować, które zdarzenia elementarne zdający bierze pod uwagę, nie zapisze, że $a \in \{1,2,3\}$ oraz nie zapisze, że $b = -1$, to za całe rozwiązanie zdający może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający wypisze 3 poprawne zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *Z* i przyjmie, że takimi zdarzeniami są też inne pary postaci (a,b), gdzie $a \in \{1,2,3\}$, to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile przyjęcie tych niepoprawnych zdarzeń elementarnych jest efektem błędów rachunkowych przy obliczaniu miejsc zerowych utworzonych funkcji.
5. Jeżeli zdający wypisze 2 poprawne zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *Z* i trzecie poprawne potraktuje jako zdarzenie niesprzyjające zdarzeniu *Z*, to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile odrzucenie tego poprawnego zdarzenia elementarnego jest efektem błędów rachunkowych przy obliczaniu miejsca zerowego utworzonej funkcji.
6. Jeżeli zdający zamiast rozważać $a > 0$ rozważa $a < 0$, to jego rozwiązanie może być ocenione tak jak w niżej wymienionych przypadkach.
   Przypadek 6a. Jeśli zdający, przy rozważanym $a < 0$, rozważa $b < 0$, rysuje wykres rosnącej funkcji liniowej (lub w inny sposób sygnalizuje, że rozważa funkcję rosnącą) i poprawnie oblicza $|\Omega|$, to może otrzymać **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiązuje zadanie do końca.
   Przypadek 6b. Jeśli zdający, przy rozważanym $a < 0$, rozważa funkcję liniową malejącą i konsekwentnie $b > 0$, a ponadto poprawnie oblicza $|\Omega|$, to może otrzymać **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiązuje zadanie do końca.
7. Jeżeli zdający rozwiązuje zadanie metodą drzewkową to może otrzymać:
   4 punkty – za rozwiązanie w pełni poprawne;
   3 punkty – za rozwiązanie, z którego jednoznacznie wynika, że zdający ustala:

$a = 1, 2, 3$ i że a może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, $b = -1$ i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$;

2 punkty – za rozwiązanie, z którego jednoznacznie wynika, że zdający ustala:

- $a > 0$ i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, $b < 0$ i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$

albo

- $a = 1, 2, 3$ i $b = -1$;

1 punkt – za rozwiązanie, z którego jednoznacznie wynika, że zdający ustala:

- $a = 1, 2, 3$

albo

- $a > 0$ i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$.

8. Jeżeli zdający poprawnie obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych (lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne) i zapisze, że funkcja liniowa f, jako funkcja rosnąca, ma dodatnie miejsce zerowe gdy $b = -1$, to może otrzymać **2 punkty**.

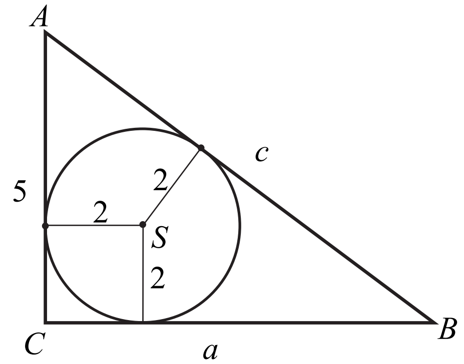
Zadanie 34. (0–4)

W trójkącie prostokątnym ACB przyprostokątna AC ma długość 5, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2. Oblicz pole trójkąta ACB.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole trójkąta ACB możemy zapisać na dwa sposoby. Ze wzoru na pole trójkąta z podstawą i prostopadłą doń wysokością trójkąta otrzymujemy

$$P_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot a = \frac{5}{2} a,$$

a ze wzoru na pole trójkąta z promienieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt otrzymujemy

$$P_{ACB} = p \cdot r = \frac{1}{2} \cdot \left(|AC| + |BC| + |AB|\right) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot (5 + a + c) \cdot 2 = a + c + 5.$$

Stąd otrzymujemy

$$a + c + 5 = \frac{5}{2} a,$$

$$c = \frac{3}{2} a - 5.$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą

$$5^2 + a^2 = \left(\frac{3}{2} a - 5\right)^2,$$

$$25 + a^2 = \frac{9}{4} a^2 - 15a + 25,$$

$$\frac{5}{4} a^2 - 15a = 0,$$

$$\frac{5}{4} a (a - 12) = 0.$$

Stąd

$$a = 0 \text{ lub } a = 12.$$

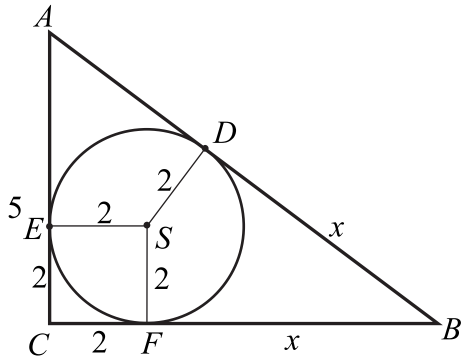
Pierwsze z otrzymanych rozwiązań nie spełnia warunków zadania, więc $a = 12$.

Pole trójkąta ACB jest więc równe

$$P_{ACB} = \frac{5}{2} a = \frac{5}{2} \cdot 12 = 30.$$

II sposób

Poprowadźmy promienie okręgu wpisanego w trójkąt ACB do punktów styczności tego okręgu z bokami tego trójkąta i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Czworokąt *CFSE* jest kwadratem o boku długości 2, gdyż kąty przy wierzchołkach *C*, *F* i *E* są proste, a boki *ES* i *FS* są równej długości. Zatem $|EC| = |FC| = 2$.

Stąd wynika, że $|AE| = |AC| - |EC| = 5 - 2 = 3$.

Oznaczmy $x = |BF|$. Zatem $|BC| = |BF| + |CF| = x + 2$.

Z twierdzenia o odcinkach stycznych otrzymujemy

$$|BD| = |BF| = x \text{ oraz } |AD| = |AE| = 3.$$

Zatem $|AB| = |AD| + |BD| = 3 + x$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ABC* otrzymujemy

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2,$$

$$(3+x)^2 = 5^2 + (x+2)^2,$$

$$9 + 6x + x^2 = 25 + x^2 + 4x + 4,$$

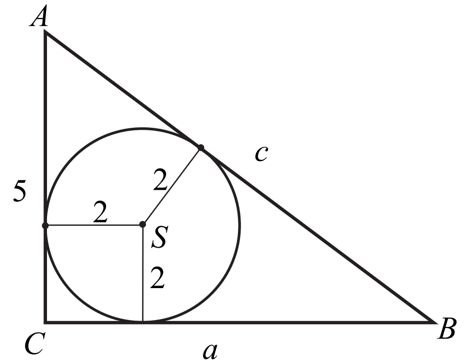
$$x = 10.$$

Przyprostokątna *AC* ma więc długość $|BC| = x + 2 = 12$, więc pole trójkąta *ACB* jest równe

$$P_{ACB} = \tfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30.$$

<u>III sposób</u>

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Ze wzoru na promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny otrzymujemy

$$2 = \tfrac{5+a-c}{2},$$

$$4 = 5 + a - c,$$

$$c = a + 1.$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$5^2 + a^2 = c^2.$$

Zatem

$$5^2 + a^2 = (a+1)^2,$$

$$25 + a^2 = a^2 + 2a + 1,$$

$$2a = 24,$$
$$a = 12.$$

Pole trójkąta ACB równe więc równe

$$P_{ACB} = \frac{5}{2}a = \frac{5}{2}\cdot 12 = 30.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- zapisze zależność między długościami przyprostokątnej BC i przeciwprostokątnej trójkąta, np.: $5^2 + a^2 = c^2$ lub $a + c + 5 = \frac{5}{2}a$ lub $2 = \frac{5+a-c}{2}$

albo

- zapisze lub zaznaczy na rysunku równości co najmniej dwóch par odpowiednich odcinków, wynikające z twierdzenia o odcinkach stycznych, np.: $|EC| = |FC|$ i $|BF| = |BD|$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- zapisze układ równań pozwalający obliczyć długość przyprostokątnej BC, np.: ($c = \frac{3}{2}a - 5$ i $5^2 + a^2 = c^2$) lub ($2 = \frac{5+a-c}{2}$ i $5^2 + a^2 = c^2$)

albo

- zapisze długości boków BC i AB trójkąta ACB w zależności od jednej zmiennej, np. długości x odcinka BF: $|BC| = x + 2$, $|AB| = x + 3$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą prowadzące do wyznaczenia długości boków BC i AB trójkąta, np.: $5^2 + a^2 = \left(\frac{3}{2}a - 5\right)^2$ lub $(x+3)^2 = (x+2)^2 + 5^2$ lub $5^2 + a^2 = (a+1)^2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający obliczy pole trójkąta ACB: $P_{ACB} = 30$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, a jedynymi błędami w przedstawionym rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny, stosując twierdzenie Pitagorasa, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
3. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny, stosując nieistniejący wzór „kwadrat sumy/różnicy = suma/różnica kwadratów”, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
4. Jeżeli zdający pominie we wzorze na pole trójkąta współczynnik $\frac{1}{2}$, to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
5. Jeżeli zdający przyjmie, że 5 to długość przyprostokątnej BC, to może otrzymać maksymalnie **4 punkty**, o ile poprawnie rozwiąże zadanie do końca.
6. Jeżeli zdający przyjmie, że 5 to długość przeciwprostokątnej, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**, za zapisanie (zaznaczenie) równości odcinków stycznych.