CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

# EGZAMIN MATURALNY
# W ROKU SZKOLNYM 2015/2016

**FORMUŁA OD 2015**
**(„NOWA MATURA”)**
**FORMUŁA DO 2014**
**(„STARA MATURA”)**

# MATEMATYKA
## POZIOM PODSTAWOWY

## ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

**CZERWIEC 2016**

## Klucz punktowania zadań zamkniętych

| Nr zad | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Odp. | C | B | D | B | D | A | C | B | C | A | C | A | A | D | B | A | C | C | B | D | B | D | B | A | D |

## Schematy oceniania zadań otwartych

### Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż równanie $\frac{2x+1}{2x}=\frac{2x+1}{x+1}$, gdzie $x\neq -1$ i $x\neq 0$.

**Rozwiązanie**
Równanie ma sens liczbowy dla każdej liczby rzeczywistej $x\neq -1$ i $x\neq 0$.

**I sposób rozwiązania**
Przekształcamy równanie w sposób równoważny

$$\frac{2x+1}{2x}-\frac{2x+1}{x+1}=0,$$

$$\frac{(2x+1)(x+1)-2x(2x+1)}{2x(x+1)}=0,$$

$$\frac{2x^2+3x+1-4x^2-2x}{2x(x+1)}=0,$$

$$\frac{-2x^2+x+1}{2x(x+1)}=0.$$

Stąd otrzymujemy równanie kwadratowe

$$-2x^2+x+1=0.$$

Ponieważ $\Delta=1^2-4\cdot(-2)\cdot 1=9$, to równanie ma dwa rozwiązania

$$x_1=-\tfrac{1}{2},\ x_2=1.$$

Każda z otrzymanych liczb jest różna od $-1$ i od 0. Zatem każda z tych liczb jest rozwiązaniem naszego równania.

**II sposób rozwiązania**
Przedstawiamy równanie w postaci równoważnej

$$(2x+1)\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}\right)=0.$$

Z własności iloczynu, otrzymujemy

$$2x+1=0 \text{ lub } \frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}=0.$$

Rozwiązaniem pierwszego z równań jest liczba $x=-\tfrac{1}{2}$.

Zapiszmy równanie $\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}=0$ w postaci równoważnej

$$\frac{(x+1)-2x}{2x(x+1)}=0,$$

$$\frac{-x+1}{2x(x+1)}=0.$$

Stąd $x=1$.

Każda z otrzymanych liczb jest różna od $-1$ i od 0. Zatem każda z tych liczb jest rozwiązaniem naszego równania.

**III sposób rozwiązania**

Z własności proporcji możemy równanie zapisać w postaci równoważnej

$$(2x+1)(x+1)-2x(2x+1)=0,$$

$$(2x+1)(x+1-2x)=0,$$

$$(2x+1)(1-x)=0.$$

Stąd

$$2x+1=0 \text{ lub } 1-x=0,$$

$$x=-\tfrac{1}{2} \text{ lub } x=1.$$

Każda z otrzymanych liczb jest różna od $-1$ i od 0. Zatem każda z tych liczb jest rozwiązaniem naszego równania.

## Schemat punktowania

**Zdający otrzymuje ............................................................................................................. 1 p.**

gdy zapisze równanie w postaci

- równania kwadratowego w postaci uporządkowanej lub iloczynowej:
  $-2x^2+x+1=0$, $(2x+1)(1-x)=0$

albo

- alternatywy równań, np.: $2x+1=0$ lub $\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}=0$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ............................................................................................................. 2 p.**

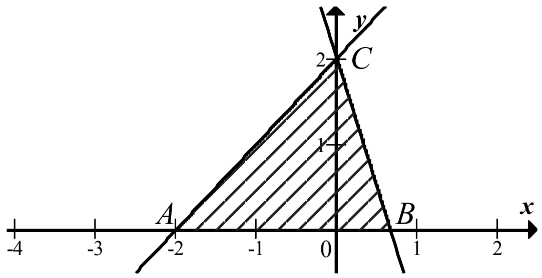
gdy wyznaczy rozwiązania równania: $x_1=-\tfrac{1}{2}$, $x_2=1$.

*Uwaga:*

Jeżeli zdający podzieli obie strony równania $\frac{2x+1}{2x}=\frac{2x+1}{x+1}$ i nie zapisze, że $2x+1\neq 0$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

**Zadanie 27. (0–2)**
Dane są proste o równaniach $y = x + 2$ oraz $y = -3x + b$, które przecinają się w punkcie leżącym na osi *Oy* układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta, którego dwa boki zawierają się w danych prostych, a trzeci jest zawarty w osi *Ox*.

**Rozwiązanie**
Zauważmy, że prosta o równaniu $y = x + 2$ przecina oś *Oy* w punkcie $(0, 2)$. Zatem współczynnik $b$ w równaniu $y = -3x + b$ jest równy 2, a więc druga z prostych ma równanie postaci $y = -3x + 2$.
Geometryczną ilustracją opisanej sytuacji jest trójkąt wskazany na wykresie.




Podstawa trójkąta ma długość $2\frac{2}{3}$, a jego wysokość jest równa 2. Zatem pole tego trójkąta jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3}.$$

## Schemat punktowania
**Zdający otrzymuje ............................................................................................................ 1 p.**
gdy
- zapisze wartość współczynnika $b$ w równaniu prostej $y = -3x + b$: $b = 2$

albo
- prawidłowo narysuje wykresy obu funkcji i zaznaczy punkt $(0, 2)$.

**Zdający otrzymuje ............................................................................................................ 2 p.**
gdy obliczy pole trójkąta: $\frac{8}{3}$.

**Zadanie 28. (0–2)**
Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$, $y$ prawdziwa jest nierówność
$$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 \geq 2\left(x^3 + y^3\right).$$

**Rozwiązanie**
**I sposób rozwiązania**
Zapiszmy nierówność $x^4 + y^4 + x^2 + y^2 \geq 2\left(x^3 + y^3\right)$ w postaci równoważnej
$$x^4 - 2x^3 + x^2 + y^4 - 2y^3 + y^2 \geq 0,$$
$$\left(x^2 - x\right)^2 + \left(y^2 - y\right)^2 \geq 0.$$

Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny, więc $\left(x^2-x\right)^2 \geq 0$ i $\left(y^2-y\right)^2 \geq 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$ i $y$. Suma dwóch liczb nieujemnych jest nieujemna, więc otrzymana nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$ i $y$.

**II sposób rozwiązania**

Zapiszmy nierówność $x^4+y^4+x^2+y^2 \geq 2\left(x^3+y^3\right)$ w postaci równoważnej

$$x^4-2x^3+x^2+y^4-2y^3+y^2 \geq 0,$$
$$x^2\left(x^2-2x+1\right)+y^2\left(y^2-2y+1\right) \geq 0,$$
$$x^2(x-1)^2+y^2(y-1)^2 \geq 0.$$

Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny, więc $x^2 \geq 0$, $(x-1)^2 \geq 0$, $y^2 \geq 0$ i $(y-1)^2 \geq 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$ i $y$. Iloczyn liczb nieujemnych jest nieujemny, więc dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$ i $y$ prawdziwe są nierówności $x^2(x-1)^2 \geq 0$ i $y^2(y-1)^2 \geq 0$. Suma dwóch liczb nieujemnych jest nieujemna, więc otrzymana nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$ i $y$.

## Schemat punktowania

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**

gdy

- zapisze nierówność w postaci $\left(x^2-x\right)^2+\left(y^2-y\right)^2 \geq 0$ i popełni błędy przy jej uzasadnianiu, np. przez zapisanie, że po lewej stronie są składniki dodatnie

albo

- $x^2(x-1)^2+y^2(y-1)^2 \geq 0$ i popełnia błędy przy jej uzasadnianiu, np. przez zapisanie, że po lewej stronie są składniki dodatnie

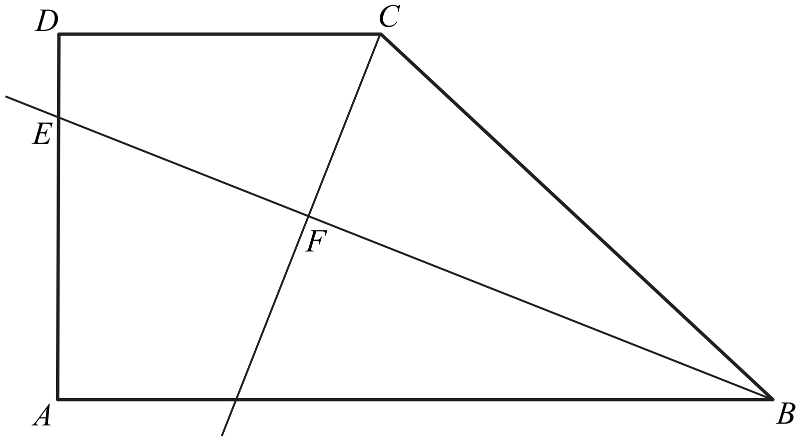
i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 2 p.**

gdy zapisze wyrażenie w postaci sumy nieujemnych składników i sformułuje wniosek.

**Zadanie 29. (0–2)**

Dany jest trapez prostokątny *ABCD* o podstawach *AB* i *CD* oraz wysokości *AD*. Dwusieczna kąta *ABC* przecina ramię *AD* w punkcie *E* oraz dwusieczną kąta *BCD* w punkcie *F* (zobacz rysunek).

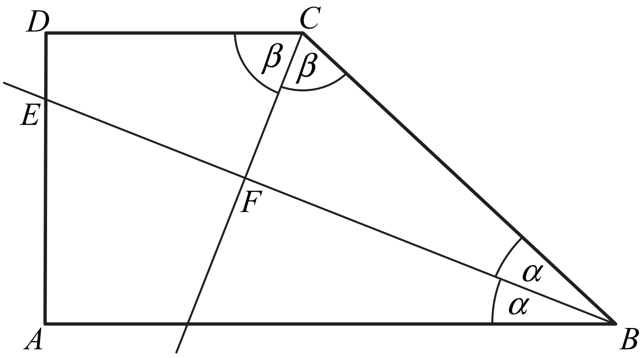



Wykaż, że w czworokącie *CDEF* sumy miar przeciwległych kątów są sobie równe.

## Rozwiązanie

**I sposób rozwiązania**

Półproste *BF* i *CF* to dwusieczne kątów *ABC* i *BCD* przy ramieniu *BC* trapezu *ABCD*. Oznaczmy zatem miary tych kątów odpowiednio $2\alpha$ i $2\beta$ jak na rysunku.




Suma miar kątów trapezu przy jego ramieniu jest równa $180°$ ,więc

$$2\alpha + 2\beta = 180°,$$

$$\alpha + \beta = 90°.$$

Suma miar kątów trójkąta jest równa $180°$, więc miara kąta *BFC* jest równa

$$|\sphericalangle BFC| = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 90° = 90°.$$

Stąd wynika, że

$$|\sphericalangle CFE| = 180° - |\sphericalangle BFC| = 180° - 90° = 90°.$$

Kąt *CDE* jest prosty, gdyż trapez jest prostokątny, więc suma miar przeciwległych kątów *CDE* i *CFE* czworokąta *CDEF* jest równa

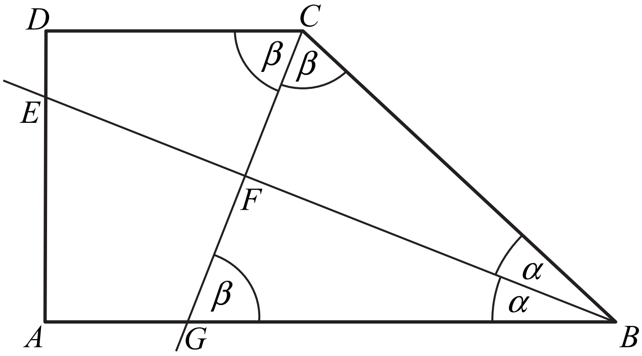
$$|\sphericalangle CDE| + |\sphericalangle CFE| = 90° + 90° = 180°.$$

Suma miar kątów czworokąta jest równa $360°$, więc suma miar dwóch pozostałych kątów czworokąta *CDEF* jest równa

$$|\sphericalangle DCF| + |\sphericalangle DEF| = 360° - 180° = 180°.$$

Zatem $|\sphericalangle CDE| + |\sphericalangle CFE| = |\sphericalangle DCF| + |\sphericalangle DEF|$, co kończy dowód.

**II sposób rozwiązania**
Półproste $BF$ i $CF$ to dwusieczne kątów $ABC$ i $BCD$ przy ramieniu $BC$ trapezu $ABCD$. Oznaczmy zatem miary tych kątów odpowiednio $2\alpha$ i $2\beta$ jak na rysunku.




Proste $AB$ i $CD$ są równoległe, więc naprzemianległe kąty $BGC$ i $DCG$ są równe, czyli

$$|\sphericalangle BGC| = \beta .$$

Zatem trójkąt $BCG$ jest równoramienny. Stąd i z równości kątów $CBF$ i $GBF$ wynika z kolei, że trójkąty $BCF$ i $BFG$ są przystające. Zatem ich kąty przy wierzchołku $F$ są równe. Są to jednak kąty przyległe, więc są to kąty proste. W rezultacie

$$|\sphericalangle CFE| = 180^\circ - |\sphericalangle BFC| = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ .$$

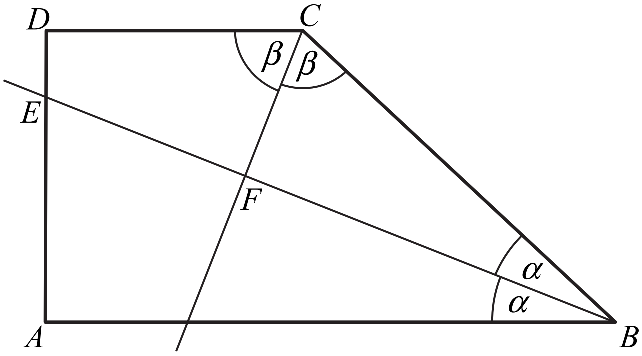
Dalsza część dowodu przebiega tak, jak w I sposobie.

## Schemat punktowania I i II sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**
gdy wyznaczy miarę kąta $BFC$: $90^\circ$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 2 p.**
gdy przeprowadzi pełny dowód.

**III sposób rozwiązania**
Półproste $BF$ i $CF$ to dwusieczne kątów $ABC$ i $BCD$ przy ramieniu $BC$ trapezu $ABCD$. Oznaczmy zatem miary tych kątów odpowiednio $2\alpha$ i $2\beta$ jak na rysunku.




Trójkąt $ABE$ jest prostokątny, więc $|\sphericalangle BEA| = 90^\circ - \alpha$. Zatem

$$|\sphericalangle DEF| = 180^\circ - |\sphericalangle BEA| = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha .$$

Suma miar przeciwległych kątów $DEF$ i $DCF$ w czworokącie $CDEF$ jest zatem równa

(1) $$|\sphericalangle DEF| + |\sphericalangle DCF| = (90^\circ + \alpha) + \beta = 90^\circ + \alpha + \beta .$$

Kąt *CFE* jest kątem zewnętrznym trójkąta *CBF*, więc

$$|\sphericalangle CFE| = \alpha + \beta .$$

Kąt *EDC* jest prosty, gdyż trapez jest prostokątny, więc suma miar przeciwległych kątów *CDE* i *CFE* czworokąta *CDEF* jest równa

$$|\sphericalangle CDE| + |\sphericalangle CFE| = 90^\circ + \alpha + \beta .$$

Stąd i z (1) otrzymujemy $|\sphericalangle DEF| + |\sphericalangle DCF| = |\sphericalangle CDE| + |\sphericalangle CFE|$. To kończy dowód.

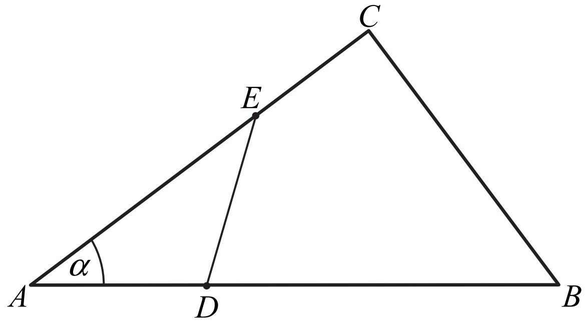
## Schemat punktowania III sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**
gdy wyznaczy miary kątów przy wierzchołkach *E* i *F* czworokąta *CDEF* w zależności od $\alpha$ i $\beta$: $|\sphericalangle AEB| = 90^\circ - \alpha$, $|\sphericalangle CFE| = \alpha + \beta$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 2 p.**
gdy przeprowadzi pełny dowód.

**Zadanie 30. (0–4)**

W trójkącie *ABC* dane są długości boków $|AB| = 15$ i $|AC| = 12$ oraz $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, gdzie $\alpha = \sphericalangle BAC$. Na bokach *AB* i *AC* tego trójkąta obrano punkty odpowiednio *D* i *E* takie, że $|BD| = 2|AD|$ i $|AE| = 2|CE|$ (zobacz rysunek).




Oblicz pole

a) trójkąta *ADE*.

b) czworokąta *BCED*.

## Rozwiązanie I sposób

Ponieważ $|BD| = 2|AD|$ i $|AE| = 2|CE|$ oraz $|AB| = 15$ i $|AC| = 12$, więc

$$|AD| = \frac{1}{3}|AB| = \frac{1}{3}\cdot 15 = 5 \text{ oraz } |AE| = \frac{2}{3}|AC| = \frac{2}{3}\cdot 12 = 8 .$$

Z jedynki trygonometrycznej otrzymujemy

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\tfrac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\tfrac{16}{25}} = \tfrac{3}{5} .$$

Zatem pole trójkąta *ABC* jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 12\cdot\frac{3}{5} = 54 ,$$

a pole trójkąta *ADE* jest równe

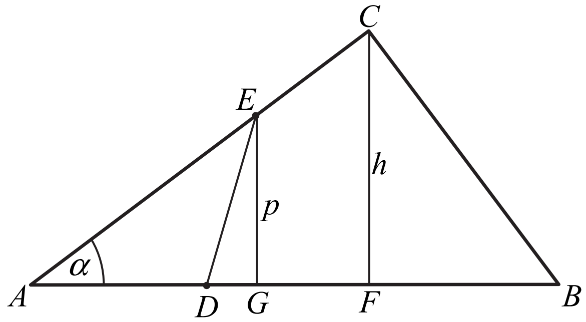
$$P_{ADE} = \frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|AE|\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot\frac{3}{5} = 12 .$$

Zatem pole czworokąta $BCDE$ jest równe

$$P_{BCDE} = P_{ABC} - P_{ADE} = 54 - 12 = 42\,.$$

## Rozwiązanie II sposób

Poprowadźmy wysokość $CF$ trójkąta $ABC$ oraz wysokość $EG$ trójkąta $ADE$ jak na rysunku.




Z trójkąta prostokątnego $AFC$ otrzymujemy

$$\cos\alpha = \frac{|AF|}{|AC|}\text{, czyli } \frac{4}{5} = \frac{|AF|}{12}\,.$$

Stąd $|AF| = \frac{48}{5}$.

Z twierdzenia Pitagorasa natomiast

$$|AC|^2 = |AF|^2 + |CF|^2,$$

$$12^2 = \left(\frac{48}{5}\right)^2 + h^2\,.$$

Stąd $h = \sqrt{12^2 - \left(\frac{48}{5}\right)^2} = \frac{36}{5}$.

Pole trójkąta $ABC$ jest zatem równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot\frac{36}{5} = 54\,.$$

Trójkąty $AFC$ i $AGE$ są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołu $A$. Zatem

$$\frac{|EG|}{|CF|} = \frac{|AE|}{|AC|}\,.$$

Ponieważ $|AE| = 2|CE|$, więc $|AE| = \frac{2}{3}|AC|$. Otrzymujemy zatem

$$\frac{p}{\frac{36}{5}} = \frac{\frac{2}{3}|AC|}{|AC|} = \frac{2}{3}\,.$$

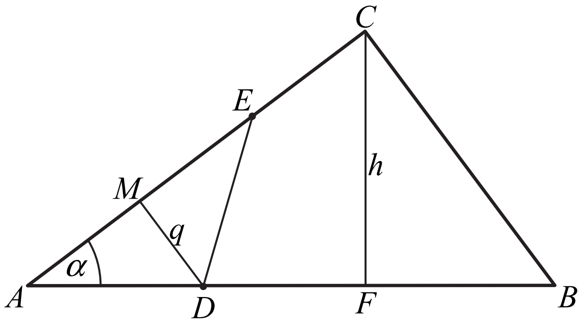
Stąd $p = \frac{2}{3}\cdot\frac{36}{5} = \frac{24}{5}$. Skoro $|BD| = 2|AD|$ i $|AB| = 15$, to $|AD| = \frac{1}{3}|AB| = \frac{1}{3}\cdot 15 = 5$. Pole trójkąta $ADE$ jest zatem równe

$$P_{ADE} = \frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot p = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{24}{5} = 12\,.$$

Zatem pole czworokąta $BCDE$ jest równe

$$P_{BCDE} = P_{ABC} - P_{ADE} = 54 - 12 = 42\,.$$

*Uwaga:*
Pole trójkąta *ADE* możemy tez obliczyć inaczej. Poprowadźmy wysokość tego trójkąta z wierzchołka *D*.




Ponieważ $|BD| = 2|AD|$ i $|AB| = 15$, więc $|AD| = \frac{1}{3}|AB| = \frac{1}{3}\cdot 15 = 5$.

Z trójkąta prostokątnego *ADM* otrzymujemy

$$\cos\alpha = \frac{|AM|}{|AD|}, \text{ czyli } \frac{4}{5} = \frac{|AM|}{5}.$$

Stąd $|AM| = 4$. Zatem z twierdzenia Pitagorasa dla tego trójkąta

$$q = \sqrt{|AD|^2 - |AM|^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Skoro $|AE| = 2|EC|$ i $|AC| = 12$, to $|AE| = \frac{2}{3}|AC| = \frac{2}{3}\cdot 12 = 8$. Pole trójkąta *ADE* jest zatem równe

$$P_{ADE} = \frac{1}{2}\cdot|AE|\cdot q = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3 = 12.$$

## Schemat punktowania I i II sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ........ 1 p.**

Zdający
- obliczy sinus kąta *BAC*: $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

albo
- długość jednego z odcinków *AD*, *AE*: $|AD| = 5$, $|AE| = 8$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........ 2 p.**

Zdający obliczy
- pole trójkąta *ABC*: $P_{ABC} = 54$

albo
- obliczy $\sin\alpha$ i długości obu odcinków *AD* i *AE*: $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $|AD| = 5$, $|AE| = 8$,

albo
- wysokość trójkąta *ADE* opuszczoną z wierzchołka *E*: $p = \frac{24}{5}$,

albo
- wysokość trójkąta *ADE* opuszczoną z wierzchołka *D*: $q = 3$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ........................................................................ 3 p.**
Zdający obliczy pole trójkąta *ADE*: $P_{ADE} = 12$.

**Rozwiązanie pełne ........................................................................................................ 4 p.**
Zdający obliczy pole czworokąta *BCDE*: $P_{BCDE} = 42$.

*Uwaga:*
Jeżeli zdający rozwiązuje zadanie z wykorzystaniem faktu, że rozważany trójkąt jest prostokątny i nie przedstawia uzasadnienia tego faktu, to może otrzymać maksymalną liczbę punktów za całe rozwiązanie.

**Zadanie 31. (0–5)**
Dany jest ciąg arytmetyczny $(a_n)$ określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, w którym $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2016$ oraz $a_5 + a_6 + a_7 + ... + a_{12} = 2016$. Oblicz pierwszy wyraz, różnicę oraz najmniejszy dodatni wyraz ciągu $(a_n)$.

## Rozwiązanie
Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów. Pierwszy polega na obliczeniu pierwszego wyrazu i różnicy ciągu $(a_n)$. Drugi etap polega na wyznaczeniu najmniejszego dodatniego wyrazu tego ciągu.

**I sposób rozwiązania I etapu**
Z warunków zadania wynika, że $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2016$ i $a_5 + a_6 + ... + a_{12} = 2016$.
Ze wzoru na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + (a_1 + 3r) = 2016 \text{ i } (a_1 + 4r) + (a_1 + 5r) + ... + (a_1 + 11r) = 2016,$$

$$4a_1 + 6r = 2016 \text{ i } 8a_1 + 60r = 2016,$$

$$2a_1 + 3r = 1008 \text{ i } 2a_1 + 15r = 504.$$

Odejmując stronami równania, otrzymujemy

$$12r = -504,$$

$$r = -42.$$

Zatem $2a_1 + 3 \cdot (-42) = 1008$, więc $a_1 = 504 + 3 \cdot 21 = 567$.

**II sposób rozwiązania I etapu**
Z warunków zadania wynika, że $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2016$ i $a_5 + a_6 + ... + a_{12} = 2016$.
Ze wzoru na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + (a_1 + 3r) = 2016,$$

$$4a_1 + 6r = 2016,$$

$$2a_1 + 3r = 1008.$$

Zauważmy, że lewa strona równania $a_5 + a_6 + ... + a_{12} = 2016$ jest sumą ośmiu wyrazów ciągu arytmetycznego $(a_5, a_6, a_7, ..., a_{12})$ o różnicy *r*. Ze wzoru na sumą *n*-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, otrzymujemy

$$\frac{a_5 + a_{12}}{2} \cdot 8 = 2016,$$

$$a_5 + a_{12} = 504.$$

Stąd i ze wzoru na $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a_1+4r+a_1+11r=504,$$

$$2a_1+15r=504.$$

Po rozwiązaniu otrzymanego układu równań otrzymujemy $a_1=567$ i $r=-42$.

**III sposób rozwiązania I etapu**

Z warunków zadania wynika, że $a_1+a_2+a_3+a_4=2016$ i $a_5+a_6+...+a_{12}=2016$.

Zauważmy, że sumując te równania stronami, otrzymujemy $a_1+a_2+...+a_{12}=4032$.

Otrzymaliśmy w ten sposób układ równań

$$S_4=2016 \text{ i } S_{12}=4032,$$

który, korzystając ze wzoru na sumę $n$-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, możemy zapisać w postaci

$$\frac{a_1+a_4}{2}\cdot 4=2016 \text{ i } \frac{a_1+a_{12}}{2}\cdot 12=4032,$$

$$a_1+a_4=1008 \text{ i } a_1+a_{12}=672.$$

Ze wzoru na $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a_1+\left(a_1+3r\right)=1008 \text{ i } a_1+\left(a_1+11r\right)=672,$$

$$2a_1+3r=1008 \text{ i } 2a_1+11r=672.$$

Po rozwiązaniu otrzymanego układu równań otrzymujemy $a_1=567$ i $r=-42$.

**IV sposób rozwiązania I etapu**

Z warunków zadania wynika, że $a_1+a_2+a_3+a_4=2016$ i $a_5+a_6+...+a_{12}=2016$.

Zauważmy, że

$$a_5+a_6+...+a_{12}=\left(a_1+a_2+...+a_{12}\right)-\left(a_1+a_2+a_3+a_4\right),$$

czyli

$$a_5+a_6+...+a_{12}=S_{12}-S_4.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób układ równań

$$S_4=2016 \text{ i } S_{12}-S_4=2016,$$

który, korzystając ze wzoru na sumę $n$-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, możemy zapisać w postaci

$$\frac{a_1+a_4}{2}\cdot 4=2016 \text{ i } \frac{a_1+a_{12}}{2}\cdot 12-\frac{a_1+a_4}{2}\cdot 4=2016,$$

$$a_1+a_4=1008 \text{ i } 6a_1+6a_{12}-2a_1-2a_4=2016.$$

$$a_1+a_4=1008 \text{ i } 4a_1-2a_4+6a_{12}=2016.$$

Ze wzoru na $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a_1+\left(a_1+3r\right)=1008 \text{ i } 4a_1-2\left(a_1+3r\right)+6\left(a_1+11r\right)=2016,$$

$$2a_1+3r=1008 \text{ i } 8a_1+60r=2016,$$

$$2a_1+3r=1008 \text{ i } 2a_1+15r=504.$$

Po rozwiązaniu otrzymanego układu równań otrzymujemy $a_1=567$ i $r=-42$.

**Rozwiązanie II etapu**

Ciąg $\left(a_n\right)$ jest więc opisany wzorem ogólnym $a_n=567+(n-1)\cdot\left(-42\right)=609-42n$ dla $n\geq 1$.

Wyznaczmy numery wszystkich dodatnich wyrazów ciągu.

$$a_n > 0,$$
$$609 - 42n > 0,$$
$$n < \frac{609}{42} = 14\frac{1}{2}.$$

Ponieważ $r = -42 < 0$, więc ciąg $(a_n)$ jest malejący. Wynika stąd, że najmniejszym dodatnim wyrazem ciągu jest $a_{14} = 609 - 42 \cdot 14 = 21$.

*Uwaga:*

Najmniejszy dodatni wyraz ciągu $(a_n)$ możemy też wyznaczyć w inny sposób. Ponieważ $r = -42 < 0$, więc ciąg $(a_n)$ jest malejący. Zauważmy, że jednym z wyrazów ciągu $(a_n)$ jest $567 - 14 \cdot 42 = 21$, a następnym $21 - 42 = -21 < 0$. Stąd wynika, że najmniejszy dodatni wyraz ciągu to 21.

## Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ........................................................................................................ 1 p.**

Zdający zastosuje

- wzór na sumę $n$-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisze jedno z równań wynikających z treści zadania:

  $\frac{a_1 + a_4}{2} \cdot 4 = 2016$, $4a_1 + 6r = 2016$, $\frac{a_5 + a_{12}}{2} \cdot 8 = 2016$, $8a_1 + 60r = 2016$,

  $\frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = 4032$

albo

- wzór na $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego i wyznaczy jeden z wyrazów $a_n$ dla $n > 1$ w zależności od $a_1$ i $r$, np. $a_2 = a_1 + r$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze, że $S_{12} = 4032$, to otrzymuje **1 punkt**.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ............................................................ 2 p.**

Zdający zapisze dwa równania wynikające z podanych sum wyrazów ciągu i wyznaczy jeden z wyrazów $a_n$ dla $n > 1$ w zależności od $a_1$ i $r$, np.:

$$\frac{a_1 + a_4}{2} \cdot 4 = 2016 \text{ i } \frac{a_5 + a_{12}}{2} \cdot 8 = 2016 \text{ i } a_4 = a_1 + 3r.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ............................................................ 3 p.**

Zdający zapisze układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi pozwalający obliczyć pierwszy wyraz i różnicę ciągu $(a_n)$, np.:

$$\frac{a_1 + a_1 + 3r}{2} \cdot 4 = 2016 \text{ i } \frac{a_1 + 4r + a_1 + 11r}{2} \cdot 8 = 2016.$$

**Rozwiązanie prawie pełne ........................................................................................ 4 p.**

Zdający

- obliczy pierwszy wyraz i różnicę ciągu $(a_n)$: $a_1 = 567$, $r = -42$

albo

- obliczy pierwszy wyraz, różnicę i najmniejszy dodatni wyraz ciągu $(a_n)$, popełniając po drodze błędy rachunkowe.

**Rozwiązanie pełne** ................................................................................................................ **5 p.**
Zdający obliczy pierwszy wyraz, różnicę oraz najmniejszy dodatni wyraz ciągu $(a_n)$:
$a_1 = 567$, $r = -42$, $a_{14} = 21$.

*Uwagi:*

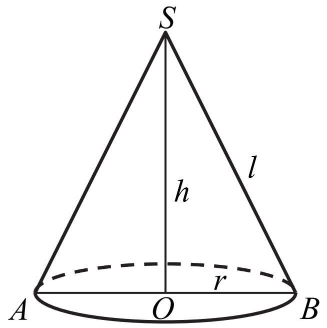
1. Jeżeli zdający błędnie zinterpretuje treść zadania przyjmując, że $a_5 + a_6 + ... + a_{12}$ jest sumą 12 początkowych wyrazów ciągu, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający zauważy, że $a_5 + a_6 + ... + a_{12}$ jest sumą 8 wyrazów ciągu, ale zapisze błędnie, że jest ona równa $\frac{2a_1+(8-1)r}{2}\cdot 8$, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający zapisze, że $a_5 + a_6 + ... + a_{12}$ jest sumą 7 wyrazów ciągu i konsekwentnie zapisze tę sumę w postaci $\frac{2a_5+(7-1)r}{2}\cdot 7$, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **3 punkty**.

## Zadanie 32. (0–4)

Dany jest stożek o objętości $8\pi$, w którym stosunek wysokości do promienia podstawy jest równy $3:8$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.

# Rozwiązanie

Niech *r*, *h* i *l* oznaczają odpowiednio promień podstawy, wysokość i tworzącą danego stożka.




Objętość stożka jest równa

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h .$$

Stąd

$$8\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 h ,$$

$$r^2 h = 24 .$$

Z treści zadania wynika, że $\frac{h}{r} = \frac{3}{8}$, skąd $h = \frac{3}{8}r$.

Otrzymujemy równanie

$$r^2 \cdot \frac{3}{8}r = 24 ,$$

$$r^3 = 64 ,$$

$$r = 4 .$$

Zatem $h = \frac{3}{8}\cdot 4 = \frac{3}{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *BSO* otrzymujemy

$$r^2 + h^2 = l^2,$$

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{4^2 + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{73}{4}} = \tfrac{\sqrt{73}}{2}.$$

Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe

$$P_b = \pi r l = \pi \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{73}}{2} = 2\sqrt{73}\,\pi.$$

## Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ........ 1 p.**

Zdający zapisze zależność między wysokością i promieniem podstawy stożka

- wynikającą z podanego stosunku, np.: $\frac{h}{r} = \frac{3}{8}$

albo

- wynikającą z podanej objętości: $r^2 h = 24$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........ 2 p.**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $r^2 \cdot \frac{3}{8} r = 24$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ........ 3 p.**

Zdający obliczy promień podstawy lub wysokość stożka: $r = 4$, $h = \frac{3}{2}$.

**Rozwiązanie pełne ........ 4 p.**

Zdający obliczy pole powierzchni bocznej danego stożka: $P_b = 2\sqrt{73}\,\pi$.

**Zadanie 33. (0–4)**

Rejsowy samolot z Warszawy do Rzymu przelatuje nad Austrią każdorazowo tą samą trasą z taką samą zakładaną prędkością przelotową. We wtorek jego średnia prędkość była o 10% większa niż prędkość przelotowa, a w czwartek średnia prędkość była o 10% mniejsza od zakładanej prędkości przelotowej. Czas przelotu nad Austrią w czwartek różnił się od wtorkowego o 12 minut. Jak długo trwał przelot tego samolotu nad Austrią we wtorek?

## Rozwiązanie

Oznaczmy przez $v$ prędkość, z jaką zwykle leci samolot na tej trasie, przez $s$ oznaczmy długość trasy, gdy samolot znajduje się nad terytorium Austrii, a przez $t$ oznaczmy czas przelotu we wtorek. Zatem prędkość, z jaką samolot leciał we wtorek była równa $1{,}1v$, a prędkość, z jaką samolot leciał w czwartek była równa $0{,}9v$. Czas przelotu w czwartek był równy $t + 12$ minut. Zatem

$$1{,}1v \cdot t = s \text{ oraz } 0{,}9v \cdot (t+12) = s.$$

Stąd

$$1{,}1v \cdot t = 0{,}9v \cdot (t+12),$$

$$11t = 9(t+12),$$

$$2t = 9 \cdot 12,$$

$$t = 9 \cdot 6 = 54.$$

Odpowiedź: Czas, w jakim samolot przelatywał we wtorek nad Austrią był równy 54 minuty.

## Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ............................................................................................................ 1 p.**
Zdający zapisze jedno z równań opisujących zależność prędkości i czasu przelotu nad Austrią, np.: $1{,}1v \cdot t = s$ lub $0{,}9v \cdot (t+12) = s$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........................................................... 2 p.**
Zdający zapisze oba równania pozwalające obliczyć czas przelotu nad Austrią we wtorek lub w czwartek, np.: $1{,}1v \cdot t = 0{,}9v \cdot (t+12)$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ........................................................... 3 p.**
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą *t*, np.: $11t = 9(t+12)$.

**Rozwiązanie pełne ......................................................................................... 4 p.**
Zdający wyznaczy czas przelotu: 54 minuty (lub 0,9 godziny).

*Uwaga:*
Jeżeli zdający stosuje błędny model, np. przyjmuje, że wzrostowi prędkości o 10% odpowiada skrócenie czasu o 10% albo przyjmuje, że wzrostowi prędkości odpowiada wydłużenie czasu, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.